Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO

SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 6 — 1951. — No. 1–2

Zagreb 1951

Izdaje Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske

Editio Societatis mathematicorum et physicorum Croatiae

SADRŽAJ

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Serija II. | Zagreb 1951 | T. 6 / No. 1-2

OSNOVI RELATIVISTIČKE KINEMATIKE[1]

Dr. ing. Danilo Blanuša, Zagreb

Razlika između klasične i relativističke kinematike osniva se na tome, što se klasične (Galilejeve) transformacije koordinatnih sustava nadomještavaju relativističkim (Lorentzovim) transformacijama.

Pokušat ćemo izvesti te transformacije na temelju jednostavnih pretpostavki, koje vrijede — izrijekom ili šutke — i u klasičnoj mehanici, a dovoljno su općenite, da dopuštaju i relativističku mehaniku. Želimo pri tome ostati u okviru čiste mehanike. Ne ćemo se dakle služiti sredstvima izvan mehanike, kao što su na pr. optički signali za sinkronizaciju satova.

Uvedene pretpostavke treba da imaju jasno određen fizički smisao. Izložit ćemo redom te pretpostavke.

I. *Postojanje inercijalnih sustava.* K svakoj slobodnoj čestici postoji jedan određeni sustav referencije s euklidskom metrikom definiran time, da u njemu ta čestica miruje i da na svakom mjestu toga sustava čestica, koja je tamo dovedena do mirovanja (t. j. koja je prisilno fiksirana uz neku točku sustava i zatim ispuštena), i dalje miruje[2]. Takav sustav zovemo inercijalnim sustavom. Pretpostavka euklidske metrike znači, da se iz jednakih štapića može sagraditi kubna mreža, kojom su onda fizički realizirane koordinatne linije pravokutnog pravocrtnog koordinatnog sustava. Sveukupnost svih takvih koordinatnih sustava, koji međusobno miruju (ali mogu biti pomaknuti i zakrenuti jedan prema drugom) zovemo sustavom referencije, koji se može smatrati reprezentiranim jednim takvim koordinatnim sustavom.

II. *Izotropnost prostora.* U svakom inercijalnom sustavu u svakoj su točki svi smjerovi ravnopravni.

---

[1] Kolokviji od 16. X. 1946. i od 1. XII. 1948.

[2] Pretpostavljeno je dakako, da nema gravitacionog polja.

Iz ove pretpostavke izlazi i homogenost prostora, t. j. sve su točke inercijalnog sustava ravnopravne. Kad bi naime neka točka A bila na temelju nekoga svojstva istaknuta pred točkom B, mogli bismo odabrati točku C jednako udaljenu od A i B (t. j. u njihovoj simetralnoj ravnini), pa tada smjerovi CA i CB ne bi bili ravnopravni, jer bi se u jednakoj udaljenosti od C nalazile točke različitih svojstava.

Dalje se iz izotropnosti može zaključiti, da se slobodna čestica, koja ne miruje, mora gibati po pravcu[3]. Izbacimo li naime česticu u nekom smjeru, onda zbog izotropnosti prostora moraju svi smjerovi okomiti na smjer početne brzine biti ravnopravni. Kad bi se čestica gibala po krivulji, bio bi smjer glavne normale istaknut pred smjerovima ostalih normala. Staza dakle mora biti pravac.

III. *Prvi Newtonov aksiom.* U svakom inercijalnom sustavu vrijedi: slobodna čestica, koja ne miruje, giba se jednoliko (i po pravcu, što već otprije znamo). Jednolikost gibanja po pravcu neka znači, da sat, koji se giba zajedno s česticom, registrira prelaženje ekvidistantnih koordinatnih linija u jednakim razmacima vremena. Pod satom pri tom zamišljamo periodički mehanizam, na pr. poput džepnoga sata.

Ovako definirana jednolikost gibanja ne pretpostavlja pojam apsolutnog vremena, niti pojam istodobnosti u različitim mjestima, koji bi bio potreban za sinkroniziranje satova, da smo htjeli jednolikost gibanja ustanoviti pomoću satova, koji miruju u samom sustavu[4].

IV. *Homogenost vremena.* Isti pokus, izveden na istom mjestu nekog inercijalnog sustava u različito vrijeme, daje isti rezultat.

V. *Princip relativnosti.* Svi su inercijalni sustavi ravnopravni.

Iz ovih pretpostavki nastojat ćemo zaključiti, kakve moraju biti transformacije, koje povezuju dva inercijalna sustava.

Da se u nekom inercijalnom sustavu može mjeriti vrijeme, treba na raznim mjestima sustava postaviti satove, za koje ćemo pretpostaviti, da su savršeno jednako građeni. Postavlja

---

[3] Na ovaj me je zaključak upozorio V. Glaser.

[4] Jedna druga mogućnost definiranja jednolikog gibanja bit će izložena na kraju članka.

se pitanje, kako ćemo ih međusobno ispoređivati, t. j. kako ćemo ustanoviti istodobnost dvaju trenutaka na različitim mjestima. Kako je već rečeno, želimo to postići čisto mehaničkim sredstvima.

Zamislimo, da treba isporediti satove u dvije točke A i B. Izbacimo li u nekom trenutku iz polovišta S dužine AB jednakim mehaničkim sredstvima (na pr. jednako građenim katapultima na pero) dvije jednake čestice u smjerovima SA i SB, morat ćemo zbog izotropnosti prostora trenutke, kada čestice stignu u točke A i B smatrati istodobnim (u inercijalnom sustavu, u kojemu te točke miruju) i naravnati satove na isto vrijeme[5]. Satovi od toga trenutka moraju i ostati sinkroni, t. j. ponovimo li kasnije taj isti pokus, naći ćemo, da satovi pokazuju isto vrijeme, kada čestice do njih stignu. Ovo zbog toga, jer su sami satovi jednako građeni i jednako udaljeni od S, pa bi različito pokazivanje značilo, da smjerovi SA i SB nisu ravnopravni.

Odaberemo li neku točku O našega inercijalnog sustava, možemo, dakle, tim postupkom sinkronizirati sve ostale satove, koji se nalaze u drugim točkama našega sustava, sa satom u točki O. No treba još dokazati, da su svi ti satovi onda i međusobno sinkroni[6].

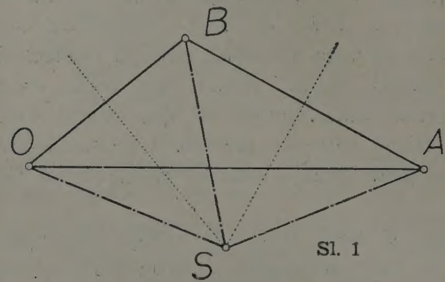
Uzmimo najprije dvije točke A i B, koje su jednako udaljene od točke O. Ako su satovi u A i B sinkronizirani sa satom u O, onda pokus međusobnog sinkroniziranja satova u A i B (česticama izbačenim iz polovišta dužine AB) mora pokazivati njihovu sinkronost, jer inače smjerovi OA i OB ne bi bili ravnopravni. Za kraću oznaku uvodimo simbol $\sigma(M, N)$, koji neka znači, da su satovi u točkama M i N sinkronizirani. Ako je dakle AB baza istokračnog trokuta ABO, onda iz $\sigma(O, A)$ i $\sigma(O, B)$ izlazi $\sigma(A, B)$. No isto se tako može iz $\sigma(O, A)$ i $\sigma(A, B)$ zaključiti, da vrijedi $\sigma(O, B)$. Jer kad to ne bi bilo, trebalo bi kazaljke sata u B pomaknuti, da se postigne $\sigma(O, B)$, pa bi time bila narušena sinkronost $\sigma(A, B)$, premda sada vrijedi $\sigma(O, A)$ i $\sigma(O, B)$, a to prema gornjem ne može biti. Možemo dakle u istokračnom trokutu iz sinkronosti s obzirom na bilo

[5] Takav mehanički način sinkroniziranja upotrebio je E. Esclangon: Sur les formules de Lorentz et le principe de la relativité, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **202** (1936), str. 708—712.

[6] To pitanje u Esclangonovoj radnji nije postavljeno.

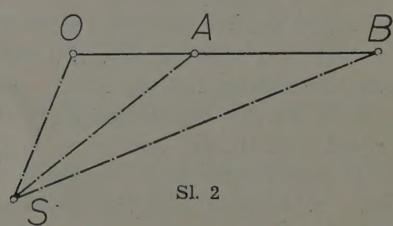
koje dvije stranice zaključiti sinkronost s obzirom na treću stranicu. Ti su zaključci na snazi i onda, ako spojnica AB prolazi točkom O.

Neka su sada A i B dvije točke, koje su nejednako udaljene od točke O, a spojnica im ne prolazi kroz O (sl. 1.). Odredimo središte S opisane kružnice trokuta OAB. Trokuti OSA, ASB i OSB su istokračni. Satovi u točkama A, B, S sinkronizirani su sa satom u točki O, t. j. vrijedi $\sigma(O, A)$, $\sigma(O, B)$ i $\sigma(O, S)$. Možemo dakle redom zaključivati: iz $\sigma(O, S)$ i $\sigma(O, A)$,



Sl. 1

da vrijedi $\sigma(S, A)$; iz $\sigma(O, S)$ i $\sigma(O, B)$, da vrijedi $\sigma(S, B)$; iz iz $\sigma(S, A)$ i $\sigma(S, B)$, da vrijedi $\sigma(A, B)$. Satovi u točkama A, B su dakle sinkroni, t. j. u bilo kakvom trokutu možemo iz sinkronosti s obzirom na dvije stranice zaključiti na sinkronost s obzirom na treću stranicu. Ti su zaključci na snazi i onda, ako je trokut OAB pravokutan, pa središte opisane kružnice pada na jednu stranicu.



Sl. 2

Neka su, konačno, A i B dvije točke, kojima spojnica prolazi kroz O (sl. 2.). Odaberemo pomoćnu točku S izvan te spojnice. Točke A, B, S smo sinkronizirali sa O. Možemo sada doslovce ponoviti gornje zaključke, premda trokuti OSA, ASB i OSB općenito više nisu istokračni. Izlazi opet $\sigma(A, B)$, čime

je konačno dokazano, da su satovi u bilo koje dvije točke A i B međusobno sinkroni, ako smo ih sinkronizirali sa satom u nekoj točki O.

Postavlja se dalje pitanje, da li će gibanje neke čestice po pravcu biti jednoliko sudeći po tako sinkroniziranim satovima sustava, ako je to gibanje jednoliko sudeći po satu, koji se giba zajedno sa česticom, t. j. ako prema tome satu čestica susreće ekvidistantne koordinatne linije u jednakim razmacima vremena. Zamislimo na pravcu tri ekvidistantne točke A, B, C. Izbacimo iz točke A česticu prema točki B. Sat, koji se giba s njom, pokazat će kao trajanje putovanja do točke B neki vremenski razmak T. U momentu, kada čestica stigne u točku B, izbacit ćemo iz te točke jednakim sredstvima istu takvu drugu česticu prema točki C. Sat, koji se giba s njom, pokazat će za putovanje od B do C isti vremenski razmak T, kao sat prve čestice za putovanje od A do B. Ovo zbog toga, jer su ta dva putovanja dva identična pokusa, izvršena na različitim mjestima u različito vrijeme. Zbog homogenosti prostora, koju smo izveli iz izotropnosti, ne može različitost mjesta utjecati na rezultat pokusa, a zbog homogenosti vremena ni različito vrijeme na taj rezultat ne utječe. No i vremenski razmak, što ga kod prvog pokusa pokazuju satovi, koji miruju u A i B, i vremenski razmak satova u B i C kod drugog pokusa jednaki su s istih razloga. Neka se taj vremenski razmak zove T'. (Ne znamo još, da li je $T = T'$.) Sat prve čestice, koja se gibala preko točke B dalje prema točki C, pokazao je isti vremenski razmak T kao za putovanje od A do B, jer se čestica giba jednoliko sudeći po vlastitom satu (pretpostavka III). Obje čestice trebaju, dakle, za put od B do C po vlastitim satovima isto vrijeme T, pa će prema tome zajedno stići u točku C[7]. Satovi sustava u točkama B i C pokazuju, dakle, vremenski razmak T', t. j. pokazuju, da je prva čestica u svome gibanju jednake putove AB i BC prevalila u jednakim vremenima. Čestica se, dakle, giba jednoliko ne samo sudeći po vlastitom satu, već i prema satovima sustava.

Prema tome rezultatu moraju koordinate x, y, z čestice biti linearne funkcije od t, gdje je t vrijeme, koje pokazuju satovi

[7] Pretpostavljamo ovdje, da satovi dviju čestica, koje su u istom trenutku pošle, ali nisu zajedno stigle, pokazuju različito vrijeme putovanja.

sustava (sinkronizirani prema prije izloženom načinu). To očito mora vrijediti za svaku česticu i u bilo kojem inercijalnom sustavu. Transformacije između dvaju inercijalnih sustava moraju, dakle, biti takve, da linearne relacije prelaze opet u linearne relacije. Geometrijski bi to značilo, da je u prostorno-vremenskom dijagramu, koji bi se nacrtao u četverodimenzionalnom prostoru u pravokutnom koordinatnom sustavu x, y, z, t, gibanje čestice predočeno kao pravac, i da je dijagram toga gibanja prosuđivanog iz nekog drugog inercijalnog sustava opet pravac. Transformacije između dvaju inercijalnih sustava čuvaju, dakle, pravce. No takve su transformacije nužno projektivne transformacije, t. j. razlomljene linearne transformacije oblika

$$x' = \frac{1}{L}\,(a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 t + a_5)\,,$$

$$y' = \frac{1}{T}\,(b_1 x + b_2 y + b_3 z + b_4 t + b_5)\,, \tag{1b}$$

$$z' = \frac{1}{L}\,(c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 t + c_5)\,, \tag{1c}$$

$$t' = \frac{1}{L}\,(d_1 x + d_2 y + d_3 z + d_4 t + d_5)\,, \tag{1d}$$

gdje je
$$L = e_1 x + e_2 y + e_3 z + e_4 t + e_5\,. \tag{1d}$$ [8]

Naš zaključak, istina, još nije sasvim besprijekoran. Treba naime pitati, da li **svi** pravci kontinuuma x, y, z, t prelaze kod transformacije opet u pravce. Primjerice pravci, koji se nalaze u nekom trodimenzionalnom rezu $t = \text{const.}$, odgovarali bi česticama s neizmjernom brzinom, a takvih čestica nema. Povrh toga možemo posumnjati, ima li čestica sa svakom konačnom brzinom. Pretpostavimo stoga, da smo sigurni samo za postojanje čestica s brzinama, koje su ispod neke granice. Tu

---

[8] Za dokaz v. na pr.:

O. Schreier u. E. Sperner, Einführung in die analytische Geometrie und Algebra II, Leipzig — Berlin 1935, str. 182 i dalje. Dokaz je proveden pomoću sredstava sintetičke geometrije;

G. Darboux, Principes de géométrie analytique, Paris 1917, str. 28—31. Dokaz se osniva na jednoj funkcionalnoj relaciji;

G. Scheffers, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie II, 1922, str. 496—498. Dokaz je proveden pomoću diferencijalnih jednadžbi.

granicu možemo odabrati tako malenu, da dotične brzine budu u okviru svakidašnjih iskustava. U našem četverodimenzionalnom dijagramu takvim česticama odgovaraju pravci, koji s osi t zatvaraju kutove manje od nekog graničnog kuta α. Za te pravce možemo, dakle, tvrditi, da će kod transformacije prijeći opet u pravce. Iz toga se može zaključiti, da ravnine, kojima je prikloni kut prema osi t manji od α, prelaze u ravnine. Možemo naime u takvoj ravnini nacrtati pramen paralelnih pravaca, kojima je kut prema osi t manji od α. Ti pravcu prekrivaju cijelu ravninu. Dalje nacrtamo kroz jednu točku A te ravnine još dva pravca p i q pod kutom manjim od α prema osi t, od kojih svaki siječe sve pravce pramena. Kod transformacije svi ti pravci prelaze opet u pravce, napose pramen paralelnih pravaca prelazi u pravce, koji svi sijeku pravce p' i q', u koje su prešli pravci p i q. Pravci p' i q' sijeku se u točki A', koja odgovara točki A (i može biti i neizmjerno daleka), pa stoga ostali transformirani pravci, za koje ne znamo, da li su paralelni, prekrivaju ravninu određenu pravcima p' i q'. Uzmemo li sada bilo koji pravac, koji može zatvarati s osi t i kut veći od α, to kroz taj pravac možemo položiti dvije ravnine, koje s osi t zatvaraju kut manji od α. Te dvije ravnine prelaze kod transformacije u ravnine, a njihova presječnica u presječnicu ravnina, t. j. u pravac. Jasno je stoga, da svi pravci prelaze u pravce, ako to čine oni, koji zatvaraju s osi t kut manji od α. Dalje dakako izlazi, da i sve ravnine prelaze u ravnine, a može se isto tako uvidjeti, da ravni trodimenzionalni prostori prelaze u ravne prostore. Vidi se iz toga izlaganja, da je opravdan zaključak, da su transformacije projektivne[9].

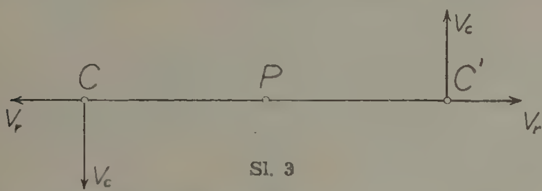
---

[9] U kolokviju od 16. X. 1946. bila je pretpostavljena homogenost prostora u oštrijem smislu, nego što izlazi iz izotropnosti prostora. Bilo je naime pretpostavljeno: ako se u jednom inercijalnom sustavu pomakne ishodište koordinata i početak brojanja vremena, onda se može naći shodan takav pomak i u drugom inercijalnom sustavu tako, da jednadžbe transformacije budu opet iste kao prije pomaka. To bi se moglo nazvati pretpostavkom »recipročne homogenosti«. Iz te pretpostavke lako se zaključuje, da transformacije moraju biti cijele linearne. V. Glumac me je potaknuo, da uklonim tu pretpostavku. To je učinjeno u kolokviju od 1. XII. 1948., na način, kako je izloženo u ovom članku. Projektivne transformacije su razmatrali i W. v. Ignatowsky, Einige allgemeine Bemerkungen zum Relativitätsprinzip (Phys. Zschr. 11 (1910), str. 972—976) i Ph. Frank — H. Rothe, Zur Herleitung der Lorentztransformation (Phys. Zschr. 13 (1912), str. 750). Njihovi zaključci mi se ne čine dovoljno obrazloženi.

Promatrajmo sada dva inercijalna sustava S i S'. Neka čestica A, koja miruje u sustavu S', imat će s obzirom na sustav S neku brzinu v_1, koja ne može biti jednaka nuli, inače bi ta dva sustava bila identična, budući da prema pretpostavci I čestica određuje samo jedan inercijalni sustav, u kojemu miruje. Zamislimo u nekom trenutku na pravcu, uzduž kojega se giba čestica A promatrana u sustavu S, drugu česticu B, koja neka također miruje u sustavu S'. Tvrdimo, da smjer njezine brzine v_2 u sustavu S mora padati u taj isti pravac. Da nije tako, mogli bismo je rastaviti u komponentu u smjeru brzine v_1 i u komponentu okomitu na tu brzinu. Ta bi normalna komponenta određivala jedan smjer, koji bi bio istaknut među svim smjerovima okomitim na brzinu v_1, što se protivi pretpostavci o izotropnosti prostora. To razmatranje vrijedi za svaku česticu, koja miruje u sustavu S', a nalazi se u nekom trenutku na pravcu gibanja čestice A, gledano u sustavu S. Sve se te čestice, dakle, gibaju uzduž toga pravca, a da još ne ulazimo u pitanje, da li su im brzine jednake. No zanima nas, da li te čestice leže na pravcu i u sustavu S'. Da se to istraži, treba se sjetiti, da je gibanje svake te čestice s obzirom na sustav S u četverodimenzionalnom prostoru x, y, z, t predočeno kao pravac. Taj pravac zovemo »svjetskom crtom« dotične čestice. Projekcija toga pravca na prostorni rez $t = \text{const.}$, t. j. na trodimenzionalni prostor x, y, z, zove se staza čestice i dobiva se analitički eliminacijom varijable t iz jednadžbi gibanja čestice. No sve čestice, koje smo sada promatrali, imaju istu pravčastu stazu, dakle istu projekciju. Njihove svjetske crte tvore dakle ravninu. Transformacijom na sustav S' ta ravnina prelazi opet u ravninu u četverodimenzionalnom prostoru x', y', z', t', a trenutni položaj tih čestica u sustavu S' dobivamo kao presjek transformirane ravnine s trodimenzionalnim prostorom $t' = \text{const.}$, gdje je t' vrijeme mjereno u sustavu S', za koje još ne znamo, u kakvoj je vezi s vremenom t sustava S. Presjek transformirane ravnine svjetskih crta i prostora $t' = 0$ opet je pravac. Čestice, za koje smo pretpostavili, da miruju u sustavu S', leže dakle na pravcu, ako ih promatramo u tom sustavu.

Promatrajmo sada u sustavu S neku treću česticu C, koja miruje u sustavu S', a ne nalazi se na pravcu česticâ A i B. Brzinu te čestice rastavimo u »longitudinalnu« komponentu u smjeru pravca AB, u »radijalnu« komponentu okomitu na taj

pravac, a sadržanu u ravnini ABC, i u »cirkularnu« komponentu okomitu na ravninu ABC. Zbog izotropnosti prostora moraju svi smjerovi okomiti na pravac AB biti ravnopravni, pa stoga moraju sve čestice, koje se nalaze u ravnini kroz C okomitoj na pravcu AB u istoj udaljenosti od toga pravca, imati brzine s istim longitudinalnim, radijalnim i cirkularnim komponentama. Svim cirkularnim komponentama mora odgovarati isti smisao vrtnje oko pravca AB. Promatrajmo naime tri takve komponente. Ako nemaju sve tri isti smisao vrtnje, dvije od njih svakako imaju isti smisao, a treća suprotni. Dotični bi smjer bio istaknut pred drugim dvjema. Uzmimo sada dvije čestice C i C', koje su aksijalno simetrične spram pravca AB (sl. 3.). Pravac AB je okomit na ravnini slike, a točka P

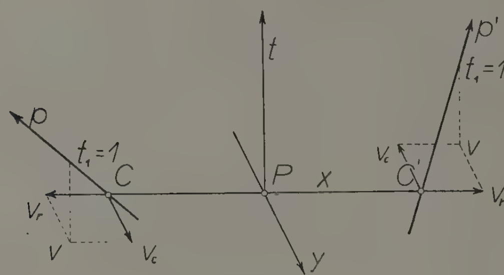


Sl. 3

je njegovo probodište. Cirkularne komponente su antiparalelne. Nije teško zaključiti, da se svjetske crte tih čestica nalaze onda i samo onda u jednoj ravnini, ako je cirkularna komponenta jednaka nuli, dok su u protivnom slučaju te svjetske crte mimosmjerne. Kad je longitudinalna komponenta različita od nule, već su same staze čestica mimosmjerni pravci. Ni njihove svjetske crte onda ne mogu ležati u ravnini, jer bi inače njihove projekcije na prostor x, y, z, t, t. j. staze čestica, ležale u projekciji te ravnine na prostor x, y, z, a to je opet ravnina. No i u slučaju, da je longitudinalna komponenta jednaka nuli, kada su dakle brzine antiparalelne i staze se nalaze u ravnini okomitoj na pravcu AB (t. j. u ravnini slike), opet su svjetske crte mimosmjerne. To se odmah vidi, ako te svjetske crte p i p' predočimo u trodimenzionalnom prostoru, koji razapinju ravnina stazâ i os t (sl. 4.). (U slici je ravnina x, y uzeta kao ravnina stazâ, a pravac CC' kao os x.)

Svjetske crte čestica C i C' s obzirom na sustav S' sigurno su u jednoj ravnini, jer obje čestice miruju u tom sustavu. Budući da transformacija čuva ravnine, moraju i svjetske crte s obzirom na sustav S biti u ravnini, cirkularna komponenta

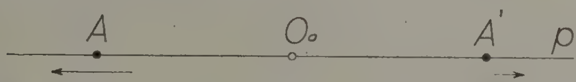
brzine je dakle jednaka nuli, i čestice C, C' stoga ostaju trajno u ravnini ABC. To isto dakako vrijedi i za sve druge čestice, koje se u nekom trenutku nalaze u toj ravnini, a miruju u sustavu S'. Može se još pitati, da li su te čestice i s obzirom na sustav S' sve u istoj ravnini. Svjetske crte svih tih čestica sa stajališta sustava S leže u ravnom trodimenzionalnom prostoru, koji je razapet ravninom ABC i osi t. Transformacijom na sustav S' taj prostor prelazi opet u ravan prostor. Njegov presjek s prostorom $t' = \text{const.}$ je dakle ravnina, t. j. čestice se zaista i u sustavu S' nalaze u ravnini.



Sl. 4

Da nađemo transformaciju između dvaju inercijalnih sustava, odabrat ćemo dvije slobodne čestice A i A', kojima su takva dva sustava određena. Čestica A' imat će u sustavu čestice A neku brzinu. Ako je ta brzina jednaka nuli, t. j. ako čestica A' miruje u sustavu čestice A, obje čestice definiraju isti inercijalni sustav. Možemo dakle pretpostaviti, da je ta brzina različita od nule. Umjesto čestice A može nam kao nosilac njezina sustava služiti bilo koja čestica, koja u tom sustavu miruje, na pr. neka čestica A_1, koja se nalazi na stazi čestice A'. Čestica A' i čestica A_1 sastaju se stoga u nekom trenutku (prošlom ili budućem), t. j. njihove se svjetske crte sijeku. Uzmemo li obrnuto bilo koje dvije čestice A i A', koje se sastaju, kojima se dakle svjetske crte sijeku, imat će čestica A' u sustavu čestice A neku brzinu, a čestica A će se nalaziti na stazi čestice A'. Možemo stoga izabrati bilo koje dvije čestice, koje se sastaju, i tražiti transformacije između njihovih inercijalnih sustava ostavljajući neodređenu njihovu relativnu brzinu, o kojoj će ovisiti koeficijenti transformacije.

Odaberimo napose u nekom inercijalnom sustavu S_0 dvije čestice A i A', koje se razmiču po istom pravcu p jednakim brzinama (sl. 5.). Te dvije čestice određuju dva inercijalna sustava S i S', između kojih ćemo tražiti transformacije. Treba za to u tim inercijalnim sustavima izabrati po jedan koordinatni sustav, što ćemo učiniti tako, da transformacije budu što jednostavnije. Lako je onda prijeći na transformaciju između bilo kojih drugih koordinatnih sustava, jer su transformacije između koordinatnih sustava jednog te istog inercijalnog sustava poznate iz euklidske geometrije.



Sl. 5

Ishodišta O i O' naših dvaju koordinatnih sustava neka se poklapaju sa česticama A i A', a točka, u kojoj su se u nekom trenutku ishodišta pokrivala, neka se zove O_0. Os X odnosno os X' neka je određena nizom čestica, koje se u nekom trenutku (prema satovima sustava S_0) nalaze na pravcu p, a miruju u sustavu S odnosno S'. Vidjeli smo već, da te čestice onda i dalje ostaju na tom pravcu i da i u sustavu S odnosno S' leže na pravcu. Dalje je jasno, da bilo koja od čestica, koje čine os X, stalno susreće čestice osi X', što se vidi u sustavu S_0, i da se prema tome u sustavu S čestice osi X' gibaju uzduž osi X, dok se u sustavu S' čestice osi X gibaju uzduž osi X'. Možemo dakle reći, da osi X i X' klize jedna po drugoj. Smjerovi tih osi neka su određeni tako, da je smjer osi X suprotan smjeru gibanja ishodišta O' promatranog u sustavu S, a smjer osi X' suprotan smjeru gibanja ishodišta O promatranog u sustavu S'. Početak brojanja vremena neka je u sva tri sustava odabran tako, da satovi u ishodištima O_0, O, O' u trenutku njihova pokrivanja pokazuju vrijeme $t_0 = t = t' = 0$.

Promatrajmo sada one prostorno-vremenske točke, koje se, gledano u sustavu S, nalaze u ravnini Π_1 kroz O okomito na os X u trenutku $t = 0$. Te će točke gledane u sustavu S_0 ležati u nekoj ravnini Π_1^0 kroz O_0. Normala te ravnine u točki O_0 mora se poklapati s pravcem p, jer bi svaki drugi smjer normale značio nov istaknut smjer, što bi bilo u protivrječju s izotropnošću prostora. Ravnina Π_1^0 je dakle okomita na pravcu p, t. j. na osi X_0. U pravac p zamislimo položenu os X_0

sustava S_0, kojoj se pozitivni smjer podudara, recimo, sa smjerom brzine ishodišta O. Između sustava S_0 i S vrijede jednadžbe transformacije poput (1a) do (1e), gdje samo treba na lijevoj strani mjesto crtanih veličina pisati veličine s indeksom 0. Za ishodišta u trenutku njihova pokrivanja vrijedi

$$x = y = z = t = x_0 = y_0 = z_0 = t_0 = 0 \tag{2}$$

(bez obzira na to, kako smo orijentirali osi Y, Z i Y_0, Z_0), što daje

$$a_5 = b_5 = c_5 = d_5 = 0 \tag{3}$$

Za konstantu e_5 možemo pretpostaviti, da je različita od nule, jer bi inače transformacija postala singularna. Koordinate x_0, y_0, z_0, t_0, koje odgovaraju prostorno-vremenskoj točki $x = y = z = t = 0$ bile bi neodređene, a čestica, koja se giba po jednadžbama

$$x = v_x t, \quad y = v_y t, \quad z = v_z t,$$

t. j. slobodna čestica sustava S, kojoj staza prolazi kroz ishodište O, imala bi u sustavu S_0 sve četiri koordinate određene, t. j. čestica bi u tom sustavu postojala samo u jednom trenutku na izvjesnom mjestu, a izvan toga je uopće ne bi bilo. Budući da su konstante u transformaciji (1a) do (1e) određene samo do jednog zajedničkog faktora, možemo staviti

$$e_5 = 1 \,. \tag{4}$$

Vrijeme, koje pokazuju satovi sustava S_0 u točkama ravnine Π_1^0, kada satovi sustava S u tim točkama pokazuju $t = 0$, dobivamo iz (1d) i (1e) stavivši $x = t = 0$:

$$(e_2 y + e_3 z + 1)\, t_0 = d_2 y + d_3 z \,. \tag{5}$$

Promatrajmo sve točke u ravnini Π_1^0, koje su jednako udaljene od ishodišta. One moraju pokazivati isto vrijeme $t_0 = C$ zbog ravnopravnosti smjerova iz ishodišta prema tim točkama. Možemo za te točke staviti

$$y = A\cos\varphi\,, \quad z = A\sin\varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)\,, \tag{6}$$

pa dobivamo

$$\begin{aligned}(Ae_2\cos\varphi + Ae_3\sin\varphi + 1)\, t_0 &= A\,(d_2\cos\varphi + d_3\sin\varphi) = \\ &= C\,(Ae_2\cos\varphi + Ae_3\sin\varphi + 1)\end{aligned} \tag{7}$$

za sve vrijednosti kuta φ. Iz toga izlazi

$$d_2 = Ce_2\,, \quad d_3 = Ce_3\,, \quad C = 0\,, \tag{8}$$

t. j.

$$d_2 = d_3 = 0 \tag{9}$$

i

$$C = 0\,. \tag{10}$$

Prema tome svi satovi pokazuju vrijeme $t_0 = 0$. Analogno razmatranje vrijedi i za sustav S', pa možemo reći, da se koordinatne ravnine Π_1^0, Π_1 i Π_1' pokrivaju u trenutku $t_0 = 0$ i da su im te prostorno-vremenske točke istodobne u sva tri sustava.

Odaberimo dalje dvije međusobno okomite ravnine Π_2^0 i Π_3^0 u sustavu S_0, koje prolaze pravcem p. Čestice, koje se nalaze u nekom trenutku u jednoj od tih ravnina sustava S_0, a miruju u sustavu S, ostaju i dalje u toj ravnini, a i ako ih promatramo u sustavu S, one leže u jednoj ravnini. Analogno vrijedi za čestice, koje miruju u sustavu S' i leže u tim ravninama. Jasno je, da čestice sustava S stalno susreću čestice sustava S' (što se vidi u sustavu S_0) i obrnuto, tako da njima određene ravnine klize jedna po drugoj, promatrali ih mi sa sustava S ili sa sustava S'. Nije teško uvidjeti, da su ravnine Π_2^0 i Π_3^0 međusobno okomite i onda, kad ih promatramo u sustavu S ili S'. U sustavu S su naime unaprijed zadana tri međusobno okomita pravca (svaki sa dva suprotna smjera), i to pravac p i normale n_2^0 i n_3^0 ravnina Π_2^0 i Π_3^0, povučene kroz ishodište O_0. Ravnina Π_2^0 promatrana u sustavu S neka se zove Π_2. Ona prolazi kroz os X. Na njoj okomita ravnina kroz os X neka je Π_3. Ta ravnina promatrana u sustavu S_0 neka se zove $\bar{\Pi}_3^0$. Ona prolazi pravcem p. Njezina normala ne može biti identična s normalom n_2^0, jer ravnina Π_3 nije identična sa Π_2, dakle ni $\bar{\Pi}_3^0$ sa Π_2^0. Ako normala ravnine Π_3^0 nije identična niti sa n_3^0, time bi u sustavu S_0 bio istaknut nov smjer, koji nije unaprijed zadan, u protivrječju s pretpostavkom izotropnosti prostora. Ta normala mora dakle biti identična s normalom n_3^0, t. j. $\Pi_3^0 \equiv \Pi_3^0$. Međusobno okomite ravnine Π_2 i Π_3 sustava S odgovaraju dakle okomitim ravninama Π_2^0 i Π_3^0. Analogno vrijedi za sustav S'.

Pošto su tako u sva tri sustava određene koordinatne ravnine, treba samo još odrediti pozitivne smjerove osi Y i Z u sva tri sustava. Odaberimo u tu svrhu na osi Y_0 (t. j. na presječnici ravnina Π_1^0 i Π_3^0) u momentu $t_0 = 0$ točku udaljenu za 1 od ishodišta. Zamislimo, da su se u toj točki sastale čestice B_0, B, B', od kojih svaka miruje u svom sustavu, dakle po redu u S_0, S i S'. Smjer od ishodišta dotičnog sustava prema toj čestici određuje trajno pozitivni smjer dotične osi Y. Ana-

logno odaberimo i na osi Z_0 točku u udaljenosti 1 od ishodišta i tako definirajmo pomoću čestica C_0, C, C' pozitivne smjerove osi Z u sva tri sustava.

Koordinatni sustavi S i S' razlikuju se samo u tome, da im se ishodišta gibaju spram sustava S_0 u suprotnim smjerovima. Sve ostalo određeno je u oba sustava na sasvim isti način. Zbog ravnopravnosti tih dvaju suprotnih smjerova bit će dakle ta dva koordinatna sustava savršeno ravnopravna i transformacija, koja daje prijelaz od S na S' mora imati iste koeficijente kao njoj inverzna transformacija, kojom se prelazi od S' na S. Na isti način kao za transformaciju od S na S_0 možemo sada za transformaciju od S na S' izvesti uvjete (4) i (9).

Ravnine Π_2 i Π_2' trajno se pokrivaju, t. j. iz $y = 0$ izlazi $y' = 0$ uz bilo koji x, z, t, što uvršteno u (1b) daje

$$b_1 = b_3 = b_4 = 0\,. \tag{11}$$

I ravnine Π_3 i Π_3' se pokrivaju trajno, dakle iz $z = 0$ izlazi $z' = 0$ uz bilo koji x, y, t, t. j. prema (1c)

$$c_1 = c_2 = c_4 = 0\,. \tag{12}$$

Ravnina Π_1 u trenutku $t = 0$ pokriva se s ravninom Π_1' u trenutku $t' = 0$, t. j. iz $x = t = 0$ izlazi $x' = t' = 0$ uz bilo koji y, z, što uvršteno u (1a) daje

$$a_2 = a_3 = 0\,, \tag{13}$$

a uvršteno u (1d) daje

$$d_2 = d_3 = 0\,. \tag{14}$$

Budući da su smjerovi os Y i osi Z ravnopravni, mogli bismo im oznake u oba sustava izmijeniti, a da transformacija opet bude ista. Mora dakle biti

$$b_2 = c_3 \tag{15}$$

i

$$e_2 = e_3\,. \tag{16}$$

Osi X i X' klize jedna po drugoj, pa se stoga ishodište O' u sustavu S giba po osi X nekom brzinom $-v$ (negativnom, jer se giba u smjeru negativne osi X) po jednadžbama

$$x = -vt\,, \quad y = z = 0 \tag{17}$$

uz

$$x' = 0\,. \tag{18}$$

Uvrštenje u jednadžbu (1a) daje

$$a_4 = a_1 v\,. \tag{19}$$

No zbog ravnopravnosti sustava S i S' vrijedi isto tako za gibanje ishodišta O u sustavu S'

$$x' = -vt', \quad y' = z' = 0 \tag{20}$$

uz

$$x = 0 . \tag{21}$$

Uvrštenje u (1a) i (1d) daje

$$a_4 = -v d_4 , \tag{22}$$

ili zbog (19)

$$a_1 = -d_4 . \tag{23}$$

Transformacija od S na S' i njoj inverzna dakle glase

$$\left.\begin{aligned} Lx' &= -d_4 (x + vt) , \\ Ly' &= b_2 y , \\ Lz' &= b_2 z , \\ Lt' &= d_1 x + d_4 t , \\ L &= e_1 x + e_2 (y + z) + e_4 t + 1 \end{aligned}\right\} \tag{24a}$$

i

$$\left.\begin{aligned} L'x &= -d_4 (x' + vt') , \\ L'y &= b_2 y' , \\ L'z &= b_2 z' , \\ L't &= d_1 x' + d_4 t' , \\ L' &= e_1 x' + e_2 (y' + z') + e_4 t' + 1 . \end{aligned}\right\} \tag{24b}$$

Računajmo

$$\begin{aligned} LL'y' &= [e_1 x + e_2 (y + z) + e_4 t + 1]\, D'y' = \\ &= (e_1 L'x + e_2 L'y + e_2 L'z + e_4 L't + L')\, y' = \\ &= [-e_1 d_4 (x' + vt') + e_2 b_2 y' + e_2 b_2 z' + e_4 (d_1 x' + d_4 t') + e_1 x' + \\ &\quad + e_2 (y' + z') + e_4 t' + 1]\, y' . \end{aligned} \tag{25}$$

U drugu ruku je

$$LL'y' = L'b_2 y = b_2^2 y' . \tag{26}$$

Izrazi (25) i (26) moraju biti identično jednaki, pa možemo izjednačiti koeficijente istoimenih članova. Koeficijent od y'^2 daje

$$e_2 (1 + b_2) = 0 . \tag{27}$$

Da odlučimo, koji je od ova dva faktora jednak nuli, zamislimo, da smo u sustavu S promijenili orijentaciju osi Y i Z. Time bi u transformaciji od S na S' morali nadomjestiti y i z sa $-y$ i $-z$, t. j. u transformaciji bi konstante b_2 i e_2 promijenile predznak. No promjena orijentacije obadviju osi sustava S znači, da su sustavi S i S' opet ravnopravni, jer su sada osi Y i Z u momentu $t = t' = 0$ (u ravnini $\Pi_1 \equiv \Pi_1'$) orijentirane suprotno osima Y', Z', ali su isto tako osi Y', Z' orijentirane suprotno osima Y, Z. Opet će dakle inverzna transformacija imati iste koeficijente, a to znači, da istim postupkom dobivamo

$$-e_2(1 - b_2) = 0 \,. \tag{28}$$

Jednadžbe (27) i (28) daju

$$e_2 = 0 \,. \tag{29}$$

Ostanimo sada kod prvotne orijentacije osi i isporedimo koeficijente od y' u (25) i (26). Izlazi

$$b_2^2 = 1 \,. \tag{30}$$

Da nađemo predznak od b_2, sjetimo se, da se u momentu $t = 0$ čestice B i B' pokrivaju i obje označuju pozitivni smjer osi Y. Obje dakle imaju pozitivnu koordinatu y. To znači, da za $x = z = t = 0$ i $x' = z' = t' = 0$ za tu točku vrijedi $y > 0$ i $y' > 0$. No iz druge jednadžbe (24a) izlazi s tim vrijednostima i s obzirom na (29), da je $y' = b_2 y$, t. j. $b_2 > 0$. Prema (15) i (30) dobivamo dakle

$$b_2 = c_3 = 1 \,. \tag{31}$$

Isporedba koeficijenata od $y't'$ daje

$$-e_1 d_4 v + e_4 d_4 + e_4 = 0 \tag{32}$$

ili

$$e_4 = e_1 \frac{v d_4}{1 + d_4} \,. \tag{33}$$

Isporedbom koeficijenata od $x'y'$ izlazi

$$-e_1 d_4 + e_4 d_1 + e_1 = 0 \tag{34}$$

ili

$$d_1 = \frac{e_1 (d_4 - 1)}{e_4} \,. \tag{35}$$

Uvrštenje vrijednosti e_4 iz (33) daje

$$d_1 = \frac{d_4^2 - 1}{v d_4} \,. \tag{36}$$

Time je transformacija dobila oblik

$$\left.\begin{aligned} Lx' &= -d_4(x+vt), \\ Ly' &= y, \\ Lz' &= z, \\ Lt' &= \frac{d_4^2-1}{v d_4}x + d_4 t, \\ L &= e_1(x + \frac{v d_4}{1+d_4}t) + 1. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Obrnimo sada orijentaciju osi X sustava S, t. j. pišimo $-x$ mjesto x. Prema (17) je sada brzina ishodišta O' jednaka $+v$. Tu brzinu označujemo sada sa v_1, dalje pišemo $(e_1)_1$ mjesto e_1 i L_1 mjesto L. Osim toga ćemo mjesto d_4 pisati $\frac{1}{\alpha_1}$. Jednadžbe time primaju oblik

$$\left.\begin{aligned} L_1 x' &= \frac{1}{\alpha_1}(x - v_1 t), \\ L_1 y' &= y, \\ L_1 z' &= z, \\ L_1 t' &= \frac{1}{\alpha_1}(-\frac{1-\alpha_1^2}{v_1}x + t), \\ L_1 &= (e_1)_1(-x + \frac{v_1}{1+\alpha_1}t) + 1. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Ishodište O' sustava S' ima dakle brzinu v_1, a osi obadvaju sustava orijentirane su u istom smjeru. Neki drugi sustav S'' neka ima brzinu ishodišta v_2 (dok je sve ostalo odabrano kao kod sustava S'), tako da jednadžbe transformacije od S na S'' glase

$$\left.\begin{aligned} L_2 x'' &= \frac{1}{\alpha_2}(x - v_2 t) \\ L_2 y'' &= y, \\ L_2 z'' &= z, \\ L_2 t'' &= \frac{1}{\alpha_2}\left(-\frac{1-\alpha_2^2}{v_2}x + t\right), \\ L_2 &= (e_1)_2(-x + \frac{v_2}{1+\alpha_2}t) + 1. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Sustavi S' i S'' u istoj su međusobnoj relaciji kao sustavi S i S': ravnine Π_1' i Π_1'' se pokrivaju u momentu $t' = t'' = 0$ (jer se pokrivaju s ravninom Π_1), ravnine Π_2'' i Π_3'' klize po ravninama Π_2' i Π_3' (jer klize po ravninama Π_2 i Π_3), a os X'' klizi po osi X' (jer obje klize po osi X). Između tih dvaju sustava vrijedit će dakle transformacije istoga oblika kao između S i S'. Brzina ishodišta O'' u sustavu S' neka je V. Brzina ishodišta O' u sustavu S'' bit će onda $-V$. (Predznak je različit, jer orijentacija osi X' *i* X'' nije suprotna, već ista.) Vrijedi dakle

$$\left(\frac{x'}{t'}\right)_{x''=0} = V; \quad \left(\frac{x''}{t''}\right)_{x'=0} = -V, \tag{40}$$

$$\left(\frac{x}{t}\right)_{x''=0} = v_2; \quad \left(\frac{x}{t}\right)_{t'=0} = v_1. \tag{41}$$

Diobom 1. i 4. jednadžbe (38) uz $x'' = 0$ izlazi

$$\left(\frac{x'}{t'}\right)_{x''=0} = \frac{\left(\frac{x}{t}\right)_{x''=0} - v_1}{-\frac{1-\alpha_1^2}{v_1}\left(\frac{x}{t}\right)_{x''=0} + 1} = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_2}{v_1}(1-\alpha_1^2)} = V. \tag{42}$$

Izmjena uloge crtanoga i dvocrtanog sustava daje

$$\left(\frac{x''}{t''}\right)_{x'=0} = \frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1}{v_2}(1-\alpha_2^2)} = -V, \tag{43}$$

dakle

$$\frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_2}{v_1}(1-\alpha_1^2)} = -\frac{v_1 - v_2}{1 - \frac{v_1}{v_2}(1-\alpha_2^2)} = \frac{v_2 - v_1}{1 - \frac{v_1}{v_2}(1-\alpha_2^2)} \tag{44}$$

ili

$$\frac{v_2}{v_1}(1-\alpha_1^2) = \frac{v_1}{v_2}(1-\alpha_2^2). \tag{45}$$

Bit će prema tome

$$\frac{1-\alpha_1^2}{v_1^2} = \frac{1-\alpha_2^2}{v_2^2}. \tag{46}$$

Uz fiksiranu brzinu v_1 može brzina v_2 biti bilo kakva, dakle je izraz $\frac{1-\alpha_2^2}{v_2^2}$ uvijek isti i jednak nekoj konstanti k, t. j. vrijedi općenito

$$\alpha = \sqrt{1-kv^2}\,. \tag{47}$$

Jednadžbe transformacije sada glase (uz ispuštene indekse za v, α, L i e_1):

$$\left.\begin{aligned} Lx' &= \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}}(x-vt)\,, \\ Ly' &= y\,, \\ Lz' &= z\,, \\ Lt' &= \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}}(-kvx+t)\,, \\ L &= e_1\left(-x+\frac{v}{1+\sqrt{1-kv^2}}\,t\right)+1\,. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Treba još odrediti koeficijent e_1. Ishodište O' giba se u sustavu S jednoliko, t. j. za $x'=0$ vrijedi

$$x = vt\,. \tag{49}$$

No prema našoj definiciji jednolikosti gibanja i sat u tom ishodištu registrira jednake vremenske razmake kod susretanja ekvidistantnih točaka na osi X, t. j. mora vrijediti i proporcionalnost

$$x = Ct' \qquad (x'=0)\,. \tag{50}$$

Uvrstimo li (49) u 4. jednadžbu (48), izlazi

$$\left[e_1\left(-x+\frac{v}{1+\sqrt{1-kv^2}}\,\frac{x}{v}\right)+1\right]t' = \frac{1}{\sqrt{1-kv^2}}\left(-kvx+\frac{x}{v}\right).$$

Uvrštenje vrijednosti od x prema (50) daje

$$e_1Ct'\left(-1+\frac{1}{1+\sqrt{1-kv^2}}\right)+1 = \frac{C}{\sqrt{1-kv^2}}\left(-kv+\frac{1}{v}\right). \tag{52}$$

No ta relacija može za svaki t' vrijediti samo, ako je

$$e_1 = 0\,, \tag{53}$$

dakle

$$L = 1\,. \tag{54}$$

Dobivamo tako Lorentzovu transformaciju

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\alpha}(x - vt)\,, \\ y' &= y\,, \\ z' &= z\,, \\ t' &= \frac{1}{\alpha}(-kvx + t)\,, \\ \alpha &= \sqrt{1 - kv^2}\,, \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

gdje je nepoznata samo još konstanta k, koja se ne da odrediti iz naših pretpostavki. Za $k = 0$ dobili bismo Galilejevu transformaciju, t. j. klasičnu kinematiku.

Uvrsti li se vrijednost za α iz (47) u (42), izlazi teorem zbrajanja brzina

$$V = \frac{v_2 - v_1}{1 - kv_1 v_2} \tag{56}$$

ili

$$v_2 = \frac{v_1 + V}{1 + kv_1 V}\,. \tag{57}$$

Hoćemo li u sustavu S mjeriti duljinu štapa, koji miruje u sustavu S' i proteže se u smjeru osi X' toga sustava, onda to znači, da treba ustanoviti razmak njegovih krajnjih točaka u nekom trenutku t, t. j. istodobno u sustavu S. Ako krajnje točke štapa u sustavu S' imaju koordinate $x_1' = 0$ i $x_2' = \Delta l_0$ (Δl_0 je »duljina mirovanja« štapa), onda će prema 1. jednadžbi (55) jednadžbe gibanja tih točaka u sustavu S glasiti

$$x_1 - vt = 0 \tag{58}$$

odnosno

$$x_2 - vt = \alpha \Delta l_0\,, \tag{59}$$

t. j. mjerena duljina Δl iznosi

$$x_2 - x_1 = \Delta l = \alpha \Delta l_0\,. \tag{60}$$

Promatramo li neki sat sustava S', recimo sat u ishodištu O', i isporedimo li ga sa satovima sustava S, koje susreće, dobit ćemo vrijeme Δt, koje je proteklo u sustavu S, dok je sat sustava S' pokazao vremenski razmak Δt_0 (»vlastito vrijeme«

sata). Ako je početak vremenskog razmaka $t = t' = 0$ (kad su se ishodišta pokrivala), dobivamo za $t' = \Delta t_0$, $x = vt$, $t = \Delta t$ prema 4. jednadžbi (55)

$$\Delta t_0 = \frac{1}{\alpha}(-kv^2\Delta t + \Delta t) = \alpha\Delta t. \qquad (61)$$

Da odredimo konstantu k, možemo se načelno poslužiti nekim prikladnim mehaničkim pokusom. Zamislimo primjerice, da uspije dovoljnom točnošću realizirati Einsteinov zamišljeni pokus, koji se sastoji u tome, da se ustanovi razmak Δl točaka, u kojima su se podudarali lijevi odnosno desni krajevi dvaju jednakih štapova duljine mirovanja Δl_0, koji se pomiču istim brzinama v suprotnog smjera jedan uzduž drugoga s lijeva na desno, odnosno s desna na lijevo. Zbog ravnopravnosti suprotnih smjerova ta će se pokrivanja krajeva desiti istodobno u našem sustavu promatranja, tako da dobivamo za tu udaljenost formulu (60), iz koje izlazi

$$k = \frac{1}{v^2}\left[1 - \left(\frac{\Delta l}{\Delta l_0}\right)^2\right], \qquad (62)$$

čime bi k bio određen. No točnost mehaničkih pokusa ni izdaleka nije dovoljna, da bi se iz ovakvih mjerenja mogla zaista odrediti konstanta k, za koju iz elektrodinamičkih razmatranja znamo, da joj je vrijednost vrlo malena, naime

$$k = \frac{1}{c^2}, \qquad (63)$$

gdje je c brzina svjetlosti. Prema toj vrijednosti vidimo, da je $k > 0$, pa je stoga u jednadžbi (60) $\Delta l < \Delta l_0$, a u jednadžbi (61) $\Delta t > \Delta t_0$.

Uvrštenjem vrijednosti (63) prelaze jednadžbe (55) u poznati oblik Lorentzove transformacije, (57) je Einsteinov teorem zbrajanja brzina, a (60) i (61) su izrazi za Lorentzovu kontrakciju i za dilataciju vremena. Time su dobiveni tipični rezultati kinematike teorije relativnosti.

Na kraju ćemo spomenuti jednu drugu moguću varijantu u početnim pretpostavkama. Kod razmatranja o sinkronizaciji satova mehaničkim sredstvima treba pretpostaviti samo izotropnost prostora, a još ne mora biti poznato, da li se čestice gibaju jednoliko. (Mogle bi se, recimo, gibati jednoliko ubrzano u svim

smjerovima.) Stoga se kod pretpostavke jednolikosti gibanja mogu pretpostaviti već sinkronizirani satovi, pa se jednolikost može definirati pomoću satova sustava, prema kojemu se čestica giba, umjesto pomoću sata, koji putuje sa česticom. Zaključak, da zbog homogenosti prostora i vremena iz jedne definicije jednolikosti izlazi druga, provediv je i obrnuto, tako da ostali dio razmatranja ostaje isti. Čak bi kod toga otpala usput formulirana pretpostavka, da dvije čestice izaslane istodobno iz neke točke A stignu u različito vrijeme u točku B, ako satovi tih čestica pokazuju različito vrijeme putovanja. Umjesto toga se zaključuje, da satovi dviju čestica, koje su prema satovima sustava istodobno pošle iz točke A i istodobno prispjele u točku B, pokazuju isto trajanje putovanja. No to je evidentno, jer se radi o dva identična procesa. Stoga bi se toj varijanti mogla dati prednost, samo što onda prije formulacije pretpostavke o jednolikosti gibanja treba provesti razmatranje o sinkroniziranju satova.

(Primljeno 11. X. 1950.)

DIE GRUNDLAGEN DER RELATIVISTISCHEN KINEMATIK[1]

Von Danilo Blanuša, Zagreb

Zusammenfassung

Es soll auf Grund von einfachen, auch in der klassischen Mechanik gültigen Voraussetzungen eine allgemeine Transformation abgeleitet werden, die als Sonderfälle die Galilei- und die Lorentztransformation enthält. Dabei sollen keinerlei aus dem Rahmen der Mechanik fallende Hilfsmittel — wie etwa Lichtsignale und dgl. — herangezogen werden.

Es wird von folgenden Voraussetzungen ausgegangen.

I. *Existenz von Inertialsystemen.* Zu jedem freien Teilchen gibt es ein bestimmtes Bezugssystem mit euklidischer Metrik, in dem das Teilchen ruht, während jedes andere Teilchen, das im System zur Ruhe gebracht wird, d. h. an einem Punkt festgehalten und daraufhin losgelassen wird, auch weiterhin ruht[2]. Ein solches Bezugssystem heisse ein Inertialsystem. Die Voraussetzung euklidischer Metrik bedeutet physikalisch die Möglichkeit, aus gleichen Stäben ein kubisches Raumgitter aufzubauen, womit ein rechtwinkliges Koordinatensystem realisiert ist. Die Gesamtheit aller solchen gegeneinander ruhenden (aber eventuell verschobenen und gedrehten) Koordinatensysteme nennen wir ein Bezugssystem, das durch ein solches Koordinatensystem repräsentiert ist.

II. *Isotropie des Raumes.* In jedem Inertialsystem sind in jedem Punkte alle Richtungen gleichberechtigt.

Hieraus folgt die Homogenität des Raumes, d. h. alle Punkte eines Inertialsystems sind gleichberechtigt. Wäre nämlich ein Punkt A durch irgendeine Eigenschaft vor dem Punkt B ausgezeichnet, und ist C ein Punkt der Symmetralebene von AB, so wären die Richtungen CA und CB nicht gleichberechtigt, da sich in gleicher Entfernung von C zwei Punkte verschiedener Eigenschaften befänden.

Ferner lässt sich schliessen, dass ein freies Teilchen, sofern es nicht ruht, eine geradlinige Bewegung ausführen muss, da sonst in irgendeinem Kurvenpunkt die Hauptnormale eine unter den Normalenrichtungen ausgezeichnete Richtung wäre, was der Isotropie des Raumes widerspräche.

III. *Das erste Newtonsche Axiom.* In jedem Inertialsystem bewegt sich jedes Teilchen, das nicht ruht, gleichförmig (und gerad-

---

[1] Kolloquien vom 16. X. 1946 und 1. XII. 1943.

[2] Von Gravitationsfeldern wird natürlich abgesehen.

linig, wie wir schon wissen). Die Gleichförmigkeit der Bewegung soll bedeuten, das eine mit dem Teilchen mitbewegte Uhr beim Überschreiten äquidistanter Koordinatenlinien gleiche Zeitabschnitte anzeigt. Unter einer Uhr verstehen wir einen periodischen Mechanismus, wie er etwa durch eine Taschenuhr realisiert ist.

Die so definierte Gleichförmigkeit setzt weder den Begriff einer absoluten Zeit, noch den Begriff der Gleichzeitigkeit getrennter Ereignisse voraus, der bei Benützung der im System ruhenden Uhren nötig wäre[4].

IV. *Homogenität der Zeit.* Derselbe Versuch, amselben Ort eines Inertialsystems zu verschiedenen Zeitpunkten ausgeführt, ergibt dasselbe Resultat.

V. *Relativitätsprinzip.* Alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt.

Um aus diesen Voraussetzungen die Tranformationsformeln zwischen zwei Inertialsystemen abzuleiten, untersuchen wir zunächst die Möglichkeit der Synchronisierung gleichgebauter, an verschiedenen Orten eines Inertialsystems ruhender Uhren.

Entsenden wir aus dem Hälftungspunkt S der Strecke AB zwei gleiche Teilchen mit gleichen mechanischen Hilfsmitteln (z. B. gleichgebauten Federkatapulten) in den Richtungen SA und SB, so müssen wir wegen der Gleichberechtigung dieser zwei Richtungen die Zeitpunkte, in welchen die Teilchen in den Punkten A, B eintreffen, als gleichzeitig (im Inertialsystem, in dem die Punkte ruhen) betrachten und die dort befindlichen Uhren auf gleiche Zeit richten. (Eine solche Synchronisierung benützte Esclangon[5].) Die Uhren bleiben in diesem Sinne synchron, sonst wären die zwei Richtungen wieder nicht gleichberechtigt. Auf diese Art können wir alle Uhren des Systems mit der Uhr in einem Punkte O synchronisieren. Es ist noch zu zeigen, dass die Uhren dann auch untereinander synchron sind. (In Esclangon's Arbeit ist diese Frage nicht angeschnitten.)

Das Symbol $\sigma(M, N)$ möge bedeuten, dass die Uhren in den Punkten M, N im obigen Sinne synchronisiert sind. Sind A, B zwei von O gleichentfernte Punkte, so folgt aus $\sigma(O, A)$ und $\sigma(O, B)$, dass auch $\sigma(A, B)$ gilt, da sonst die Richtungen OA und OB nicht gleichberechtigt wären. Ebenso schliesst man aber aus $\sigma(O, A)$ und $\sigma(A, B)$, dass $\sigma(O, B)$ gilt, da sonst die Uhr in B zu korrigieren wäre, um $\sigma(O, B)$ zu erreichen, wodurch $\sigma(A, B)$ aufgehoben würde. Man kann also aus der Gültigkeit der σ-Relation bezüglich zweier Seiten eines gleichschenkeligen Dreiecks auf die Gültigkeit bezüglich der dritten Seite schliessen. Dabei kann der Punkt O auch auf AB liegen.

---

[4] Auf eine andere Möglichkeit der Definition der Gleichförmigkeit wird am Schluss der Arbeit hingewiesen.

Es sei nun $OA \neq OB$ und O liege nicht auf der Verbindungsgeraden AB (Bild 1). Es sei S der Mittelpunkt des Umkreises von OAB. Die Dreiecke OSA, ASB und OSB sind gleichschenkelig. Es sei $\sigma(O, A)$, $\sigma(O, B)$, $\sigma(O, S)$. Wir schliessen: aus $\sigma(O, S)$, $\sigma(O, A)$ folgt $\sigma(S, A)$; aus $\sigma(O, S)$, $\sigma(O, B)$ folgt $\sigma(S, B)$; aus $\sigma(S, A)$, $\sigma(S, B)$ folgt $\sigma(A, B)$. Man kann also in irgendeinem Dreieck aus zwei Seiten auf die dritte schliessen. Dies gilt auch, wenn OAB rechtwinklig ist, d. h. S auf eine Seite fällt.

Es seien schliesslich A, B zwei Punkte, deren Verbindungsgerade durch O geht (Bild 2). Ist S ein Hilfspunkt ausserhalb dieser Verbindungsgeraden, so können wir wörtlich die obigen Schlüsse wiederholen, obwohl es sich nicht mehr um gleichschenkelige Dreiecke handelt. Hiemit ist bewiesen, dass die Uhren in irgendwelchen zwei Punkten A, B synchron sind, wenn sie mit der Uhr in O synchronisiert sind.

Es ist weiter zu fragen, ob ein nach Angabe der mitgeführten Uhr gleichförmig bewegtes Teilchen sich auch bezüglich der synchronisierten Uhren des Systems gleichförmig bewegt. Es seien A, B, C drei äquidistante Punkte einer Geraden. Entsenden wir aus A ein Teilchen nach B. Die mitgeführte Uhr zeige die Reisedauer T an. Im Augenblick der Ankunft ensenden wir mit gleichen Mitteln aus B ein Teilchen nach C. Seine mitgeführte Uhr wird für die Reise von B nach C dieselbe Dauer T anzeigen, da dieser zweite Versuch identisch mit dem ersten ist, nur dass er an einem anderem Ort ausgeführt ist, was wegen der Homogenität des Raumes gleichgültig ist, und zu einem anderen Zeitpunkt, was wegen der Homogenität der Zeit das Resultat nicht beeinflusst. Aus denselben Gründen sind auch die von den ruhenden Uhren angezeigten Reisezeiten gleich und betragen etwa T'. (Wir wissen noch nicht, ob T und T' gleich oder verschieden sind.) Die mitgeführte Uhr des ersten Teilchens wird nun für die Reise von B nach C dieselbe Dauer T anzeigen wie für die Reise von A nach B, da sich das Teilchen gleichförmig bewegt. Beide Teilchen brauchen also für die Reise von B nach C dieselbe Zeit T, kommen also gleichzeitig an[7]. Die Uhren des Systems zeigen also für beide Teilchen die Reisezeit T' zwischen B und C an, d. h. das erste Teilchen hat für die gleichen Wege AB und BC dieselbe Zeit T' gebraucht, es bewegt sich daher auch bezüglich der Systemuhren gleichförmig.

Es müssen hienach die Koordinaten x, y, z des Teilchens lineare Funktionen der von den Systemuhren angezeigten Zeit t sein. Das muss offenbar für jedes Teilchen und in jedem Inertialsystem gelten. Die Transformation zwischen zwei Inertialsystemen muss also lineare Relationen wieder in lineare Relationen über-

---

[7] Dabei ist hier vorausgesetzt, dass die Uhren zweier gleichzeitig entsendeten Teilchen, deren Uhren verschiedene Reisezeiten anzeigen. zu verschiedenen Zeitpunkten eintreffen.

führen. Im vierdimensionalen Raumzeitdiagram bedeutet dies, dass die Bewegung in jedem Inertialsystem durch eine Gerade dargestellt wird. Die Transformationen müssen daher projektive Transformationen der Form (1a) bis (1e) sein. (Beweise s. in der unter [8] zitierten Literatur.)

Es liesse sich noch einwenden, dass es im Raumzeitdiagram Gerade gibt, die Teilchen mit unendlicher Geschwindigkeit entsprechen, und solche Teilchen gibt es nicht. Ausserdem ist die Existenz von Teilchen mit jeder beliebigen endlichen Geschwindigkeit fraglich. Setzen wir daher voraus, es sei nur die Existenz von Teilchen zugegeben, deren Geschwindigkeit unter einer — beliebig klein wählbaren — Geschwindigkeit liegt, deren Raumzeitgerade also mit der Zeitachse einen Winkel kleiner als ein Grenzwinkel α einschliessen. Hieraus lässt sich zunächst schliessen dass Ebenen, die einen Winkel kleiner als α mit der Zeitachse einschliessen, wieder in Ebenen übergehen. Wählen wir nämlich in einer solchen Ebene durch einen Punkt A zwei Gerade p, q, sowie eine Schar paralleler Geraden, die p und q schneiden und die ganze Ebene überdecken, wobei alle diese Geraden einen Winkel kleiner als α mit der Zeitachse einschliessen sollen, so geht bei der Transformation der Punkt A in A' über, die Geraden p, q, in p', q', die sich in A' schneiden (oder parallel sind, falls A' unendlich fern ist), während die Parallelenschar in eine Schar von Geraden übergeht, die alle p', q' schneiden und daher eine Ebene bilden. Nun sieht man weiter, dass sich durch eine beliebige Gerade zwei Ebenen legen lassen, die mit der Zeitachse einen Winkel kleiner als α einschliessen. Nach der Transformation geht ihre Schnittgerade in die neue Schnittgerade über. Es gehen also alle Geraden in Gerade über, woraus ohne weiteres folgt, dass auch alle Ebenen in Ebenen und alle linearen dreidimensionalen Räume in ebensolche Räume übergehen. Die Transformationen sind also in der Tat projektiv. (Projektive Transformationen betrachteten auch Ignatowsky, sowie Frank und Rothe[9]. Die dort gezogenen Schlüsse scheinen uns nicht hinreichend begründet.)

Betrachten wir nun zwei Inertialsysteme S und S'. Ein im System S' ruhendes Teilchen hat im System S eine von Null verschiedene Geschwindigkeit v_1, sonst wären die beiden Systeme identisch, da nach Voraussetzung I das Teilchen nur ein Inertialsystem bestimmt, in dem es ruht. Ein im System S' ruhendes Teilchen B, das sich in einem Augenblick auf der im System S gesehenen Bahn des Teilchens A befindet, muss nun in S eine Geschwindigkeit v_2 haben, die in dieselbe Gerade wie v_1 fällt. Man könnte sonst v_2 in eine Komponente in der Richtung v_1 und in eine dazu senkrechte Komponente zerlegen. Die Richtung dieser senkrechten Komponente wäre dann unter den zu v_1 senkrechten Richtungen ausgezeichnet. Alle in S' ruhenden Teilchen, die sich in einem Augenblick auf der in S gesehen Bahngeraden des Teil-

chens A befinden, bewegen sich also längs dieser Geraden. Diese Teilchen liegen aber auch in S' auf einer Geraden. Die Bewegung jedes solchen Teilchens bezüglich S ist nämlich im vierdimensionalen x, y, z, t-Raum als eine Gerade, die »Weltlinie« des Teilchens, dargestellt. Ihre Projektion auf den räumlichen Schnitt $t = \text{const.}$, d. h. auf den dreidimensionalen Raum x, y, z, ist die »Bahn« des Teilchens, Alle bisher betrachteten Teilchen haben dieselbe geradlinige Bahn, also dieselbe Projektion. Ihre Weltlinien bilden also eine Ebene. Durch Transformation in das System S' geht diese Ebene in eine Ebene des Raumes x', y', z', t' über, und die momentane Lage der Teilchen in S' ist der Schnitt dieser Ebene mit dem dreidimensionalen Raum $t' = \text{const.}$, also wieder eine Gerade. Unsere im System S' ruhenden Teilchen liegen also, in diesem System betrachtet, auf einer Geraden.

Betrachten wir nun ein drittes in S' ruhendes Teilchen C, das sich nicht auf der Geraden der Teilchen A und B befindet. Seine Geschwindigkeit zerlegen wir in eine »longitudinale« Komponente in der Richtung AB, eine »radiale« Komponente senkrecht zu dieser Geraden und eine »zirkuläre« Komponente senkrecht zur Ebene ABC. Wegen der Gleichberechtigung aller zu AB senkrechten Richtungen müssen die Geschwindigkeiten aller Teilchen, die sich in der durch C gelegten, zu AB senkrechten Ebene in gleicher Entfernung von AB befinden, dieselben longitudinalen, radialen und zirkulären Komponenten haben. Dabei muss allen zirkulären Komponenten derselben Drehsinn um AB entsprechen. Hätten etwa drei solche zirkuläre Komponenten nicht denselben Drehsinn, so hätten zwei davon den einen, die dritte den anderen Drehsinn. Dadurch wäre die Richtung, die dem Teilchen mit dieser dritten Komponente entspricht, vor den anderen beiden ausgezeichnet. Betrachten wir nun zwei zur Geraden AB axialsymmetrisch liegende Teilchen C und C' (Bild 3). P ist der Durchstosspunkt der zur Bildebene senkrecht stehenden Geraden AB. Man schliesst leicht, dass die Weltlinien der beiden Teilchen dann und nur dann in einer Ebene liegen, wenn die Zirkulärkomponente gleich Null ist. Bei von Null verschiedener longitudinalen Komponente sind schon die Bahnen selbst windschiefe Gerade, andernfalls sind die Geschwindigkeiten antiparallel und die Weltlinien windschief (Bild 4).

Die Weltlinien der in S' ruhenden Teilchen C, C' bezüglich dieses Systems sind sicher in einer Ebene, was auch nach der Transformation auf S der Fall ist. Die zirkulären Komponenten sind also Null, und die Teilchen C, C' ebenso wie alle anderen in S' ruhenden Teilchen, die sich in einem Augenblick in der Ebene ABC befinden, bleiben dauernd in dieser Ebene. Diese Teilchen sind aber auch im System S' in einer Ebene, denn die Weltlinien der Teilchen bezüglich des Systems S bilden einen von der Ebene ABC und der t-Achse aufgespannten linearen dreidimensionalen

Raum, der bei der Transformation auf S' in einen ebensolchen Raum übergeht. Sein Schnitt mit dem Raum $t' = \text{const.}$ ergibt die Ebene, in der die Teilchen liegen.

Um die Transformation zwischen zwei Inertialsystemen zu bestimmen, wählen wir zwei freie Teilchen A und A', die zwei solche Systeme bestimmen. Das Teilchen A' hat im System des Teilchens A eine von Null verschiedene Geschwindigkeit, da sonst die zwei Systeme identisch wären. Statt A können wir als Träger seines Systems irgendein anderes im System ruhendes Teilchen wählen, z. B. ein Teilchen A_1, das sich auf der Bahn des Teilchens A' befindet. A' und A treffen sich daher in einem (vergangenen oder künftigen) Augenblick, d. h. ihre Weltlinien schneiden sich. Wählen wir umgekehrt irgend zwei Teilchen A und A', deren Weltlinien sich schneiden, so wird A' im System von A eine gewisse Geschwindigkeit haben, und A wird sich auf der Bahn von A' befinden. Wir können also irgend zwei sich treffende Teilchen wählen, und die Transformation zwischen deren Systemen suchen, wobei die relative Geschwindigkeit unbestimmt zu lassen ist, da von ihr die Koeffizienten der Transformation abhängen werden.

Wählen wir insbesondere in einem Inertialsystem S_0 zwei Teilchen A und A', die sich längs einer Geraden p von einem Punkt O_0 in entgegengesetzter Richtung mit gleicher Geschwindigkeit entfernen (Bild 5). Wir suchen die Transformation zwischen den von ihnen definierten Inertialsystemen S und S'. Die Koordinatensysteme wollen wir so wählen, dass die Transformation möglichst einfach wird.

Die Ausgangspunkte O und O' der Koordinatensysteme seien in den Teilchen A und A', die sich im Punkt O_0 getroffen haben. Die X- bzw. X'-Achse sei durch eine Reihe von Teilchen gegeben, die sich in einem Augenblick (nach den Zeitangaben des Systems S_0) auf der Geraden p befinden und in S bzw. S' ruhen. Die Teilchen bleiben dann auf dieser Geraden und befinden sich auch im System S bzw. S' auf einer Geraden. Irgendeines der die X-Achse bildenden Teilchen begegnet dauernd Teilchen der X'-Achse, was im System S_0 offensichtlich ist, so dass sich in S die Teilchen der X'-Achse längs der X-Achse bewegen, und in S' die Teilchen der X-Achse längs der X'-Achse. Die beiden Achsen gleiten also aufeinander. Die Richtungen der Achsen seien so bestimmt, dass die Richtung der X-Achse der Bewegungsrichtung von O' in System S entgegengesetzt ist, und die Richtung der X'-Achse entgegengesetzt der Bewegungsrichtung von O in S'. Der Anfang der Zeitzählung sei so gewählt, dass die Uhren in den Ausgangspunkten O_0, O und O' im Augenblick des Zusammentreffens die Zeit $t_0 = t = = t' = O$ anzeigen.

Betrachten wir nun die Raumzeitpunkte, die sich, in S gesehen, in der Ebene Π_1 durch O senkrecht zur X-Achse im Augenblick $t = 0$ befinden. In S_0 gesehen liegen diese Punkte in einer

Ebene $\Pi_1{}^0$ durch O_0. Die Normale durch O_0 muss mit p zusammenfallen, da sonst durch sie eine ausgezeichnete Richtung definiert wäre. $\Pi_1{}^0$ ist also auf p senkrecht, d. h. auf der X_0-Achse des Systems S_0, deren Richtung sich etwa mit der Richtung der Geschwindigkeit von O decken möge. Zwischen den Systemen S_0 und S gelten Transformationen der Form (1a) bis (1e), wobei nur statt der gestrichenen Grössen mit dem Index 0 versehene Grössen zu setzen sind. Für die Ausgangspunkte gilt im Augenblick ihres Zusammentreffens (2) (ohne Rücksicht darauf, wie die Y- und Z-Achsen orientiert sind), woraus (3) folgt. Die Konstante e_5 können wir als von Null verschieden voraussetzen, da sonst die Transformation singulär wird. Die Koordinaten x_0, y_0, z_0, t_0, die dem Raumzeitpunkt $x = y = z = t = 0$ entsprechen, würden unbestimmt, und ein freies Teilchen, dessen Bahn im System S durch O geht, hätte in S_0 alle vier Koordinaten bestimmt, d. h. das Teilchen würde nur in einem einzigen Zeitpunkt existieren. Dabei können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (4) setzen.

Um die Zeitangaben der Uhren des Systems S_0 in den Punkten der Ebene $\Pi_1{}^0$ zu erhalten, während die Uhren des Systems S in diesen Punkten $t = 0$ anzeigen, setzen wir in (1d) und (1e) $x = t = 0$. Es folgt (5). Nun betrachten wir vom Ausgangspunkt gleich entfernte Punkte der Ebene $\Pi_1{}^0$. Wegen der Isotropie müssen die Uhren alle dieselbe Zeit $t_0 = C$ anzeigen. Wir setzen für diese Punkte (6) und erhalten (7) für jedes φ, also (8), (9) und (10). Alle Uhren zeigen also $t_0 = 0$. Eine analoge Betrachtung gilt für das System S', so dass wir sagen können, die Koordinatenebenen $\Pi_1{}^0$, Π_1 und $\Pi_1{}'$ decken sich im Augenblick $t_0 = 0$ und ihre Raumzeitpunkte sind in allen drei Systemen gleichzeitig.

Wählen wir weiter in S_0 zwei zueinander senkrechte Ebenen $\Pi_2{}^0$ und $\Pi_3{}^0$ durch p. Die Teilchen, die sich in einem Augenblick in einer dieser Ebenen des Systems S_0 befinden und in S ruhen, bleiben auch weiter in der betreffenden Ebene, und auch in S betrachtet liegen sie in einer Ebene. Das Analoge gilt für in S' ruhende Teilchen, die sich in den zwei Ebenen befinden. Die Teilchen des Systems S begegnen dauernd Teilchen des Systems S' (was in S_0 sichtbar ist) und umgekehrt, so dass die durch sie bestimmten Ebenen in beiden Systemen S und S' aufeinander gleiten. Man sieht nun ein, dass die Ebenen $\Pi_2{}^0$ und $\Pi_3{}^0$ auch in S oder S' betrachtet aufeinander senkrecht stehen. In S sind nämlich drei aufeinander senkrechte Gerade gegeben, u. zw. die Gerade p und die durch O_0 gehenden Normalen $n_2{}^0$ und $n_3{}^0$ der Ebenen $\Pi_2{}^0$ und $\Pi_3{}^0$. Die Ebene $\Pi_2{}^0$ in S betrachtet heisse Π_2. Sie geht durch die X-Achse. Die auf ihr senkrechte Ebene durch die X-Achse sei Π_3. Diese Ebene in S_0 betrachtet heisse $\bar{\Pi}_3{}^0$. Sie geht durch die Gerade p. Ihre Normale kann nicht mit $n_2{}^0$ identisch sein, da Π_3 nicht mit Π_2 identisch ist, also auch $\bar{\Pi}_3{}^0$ nicht identisch mit $\Pi_2{}^0$. Wäre die Normale von $\bar{\Pi}_3{}^0$ nicht

identisch mit n_3^0, so wäre also in S_0 eine neue Richtung ausgezeichnet, in Widerspruch mit der Isotropievoraussetzung. Die Normale ist also mit n_3^0 identisch, d. h. $\overline{\Pi}_3^0 \equiv \Pi_3^0$. Den zwei senkrechten Ebenen Π_2 und Π_3 entsprechen also senkrechte Ebenen Π_2^0, Π_3^0. Analoges gilt für das System S'.

Nachdem die Koordinatenebenen der drei Systeme hiemit bestimmt sind, sind noch die Richtungen der Y- und Z-Achse zu bestimmen. Wählen wir zu diesem Zweck auf der Y_0-Achse (d. h. auf der Schnittgeraden der Ebenen Π_1^0 und Π_3^0) im Augenblick $t_0 = 0$ einen vom Ausgangspunkt um 1 entfernten Punkt. In diesem Punkte mögen sich die Teilchen B_0, B, B', die bzw. in den Systemen S_0, S, S' ruhen, getroffen haben. Die Richtung vom Ausgangspunkt des Systems zum betreffenden Teilchen möge dauernd die positive Richtung der betreffenden Y-Achse bestimmen. Analog wählen wir die Richtung der Z-Achse in den drei Systemen.

Die Koordinatensysteme S und S' unterscheiden sich nur durch die entgegengesetzte Richtung der Bewegung ihrer Ausgangspunkte im System S_0. Alles Übrige ist in gleicher Weise definiert. Wegen der Gleichberechtigung dieser zwei Richtungen sind die zwei Systeme vollkommen gleichberechtigt, und die Transformation von S auf S' muss dieselben Koeffizienten haben wie die ihr inverse Transformation von S' auf S. Wir können nun für die Transformation von S auf S' wieder die Beziehungen (4) und (9) ableiten, wie wir es für die Transformation von S auf S_0 taten.

Die Ebenen Π_2 und Π_2' decken sich dauernd, d. h. aus $y = 0$ folgt $y' = 0$ bei beliebigen x, z, t, also gilt nach (1b) die Beziehung (11). Auch die Ebenen Π_3 und Π_3' decken sich dauernd und es folgt aus (1c) analog (12). Die Ebene Π_1 im Augenblick $t = 0$ deckt sich mit der Ebene Π_1' im Augenblick $t' = 0$, d. h. aus $x = t = 0$ folgt $x' = t' = 0$ bei beliebigen y, z, und (1a) ergibt (13), während aus (1d) (14) folgt. Da die Richtungen der Y- und Z-Achse gleichberechtigt sind, können wir ihre Bezeichnungen in beiden Systemen vertauschen, ohne dass die Transformation sich ändert, Hieraus folgt (15) und (16).

Die X- und X'-Achse gleiten aufeinander, so dass sich O' in S längs der X-Achse mit einer Geschwindigkeit $-v$ (negativ, weil sich O' in der Richtung der negativen X-Achse bewegt) nach den Gleichungen (17), (18) bewegt. Mit (1a) ergibt dies (19). Wegen der Gleichberechtigung der Systeme S und S' erhält man analog (20), (21). Die Einsetzung in (1a) und (1d) ergibt (22), oder, wegen (19), (23). Die Transformationen von S auf S' und umgekehrt haben nunmehr die Form (24a) und (24b). Wir berechnen (25) und vergleichen das mit (26). Die Koeffizienten von y'^2 ergeben (27). Um zu entscheiden, welcher Faktor gleich Null zu setzen ist, ändern wir in S die Orientierung der Y- und der Z-Achse. Wir müssten also in (24a) y und z durch $-y$ und $-z$ ersetzen, d. h. die Kon-

stanten b_2 und e_2 haben ihr Vorzeichen geändert. Die Systeme S und S' sind aber wieder vollkommen gleichberechtigt, denn es sind nun im Augenblick $t = t' = 0$ die Y- und die Z-Achse entgegengesetzt orientiert wie die Y'- und die Z'-Achse, aber dasselbe gilt auch umgekehrt. Die inverse Transformation hat also wieder dieselben Koeffizienten, d. h. wir erhalten durch dasselbe Verfahren (28), was mit (27) zusammen (29) ergibt. Bleiben wir nun bei der ursprünglichen Orientierung der Achsen und vergleichen wir die Koeffizienten von y' in (25) und (26). Es folgt (30). Um das Vorzeichen von b_2 zu bestimmen, erinnern wir uns, dass für $t = 0$ die Teilchen B und B' sich decken und die positive Y-Richtung definieren. Sie haben also beide eine positive y-Koordinate. Für $x = z = t = 0$ und $x' = z' = t' = 0$ gilt für diesen Punkt $y > 0$ und $y' > 0$. Aus der zweiten Gleichung (24a) folgt mit diesen Werten mit Rücksicht auf (29) $y' = b_2 y$, d. h. $b_2 > 0$. Nach (15) und (30) gilt also (31). Der Vergleich der Koeffizienten von $y't'$ ergibt (32) oder (33). Aus dem Vergleich der Koeffizienten von $x'y'$ folgt (34) oder (35). Die Einsetzung des Wertes von e_4 aus (33) ergibt (36). Hiemit hat die Transformation die Form (37).

Kehren wir nun die Orientierung der X-Achse in S um, d. h. schreiben wir $-x$ statt x. Nach (17) ist jetzt die Geschwindigkeit von O' gleich $+v$. Diese Geschwindigkeit bezeichnen wir fortan mit v_1, ferner schreiben wir $(e_1)_1$ statt e_1 und L_1 statt L. Ausserdem bezeichnen wir d_4 durch $\frac{1}{\alpha_1}$. Die Gleichungen lauten nun (38). Die Achsen der beiden Systeme sind also jetzt gleichorientiert. Der Ausgangspunkt eines anderen Systems S'' möge sich mit der Geschwindigkeit v_2 bewegen (während alles Übrige ebenso gewählt ist wie im System S'), so dass die Transformation von S auf S'' (39) lautet. Die Systeme S' und S'' verhalten sich gegeneinander ebenso wie die Systeme S und S'. Die Ebenen Π_1' und Π_1'' decken sich im Augenblick $t' = t'' = 0$ (da sie sich mit der Ebene Π_1 decken), die Ebenen Π_2'' und Π_3'' gleiten auf den Ebenen Π_2' und Π_3' (da sie auf den Ebenen Π_2 und Π_3 gleiten) und die X''-Achse gleitet auf der X'-Achse (da beide auf der X-Achse gleiten). Die Transformation muss also dieselbe Form haben wie zwischen S und S'. Die Geschwindigkeit des Ausgangspunktes O'' in S' sei V. Die Geschwindigkeit von O' in S'' ist dann $- V$. (Das Vorzeichen ist verschieden, weil die Orientierung der X'- und X''-Achse gleich ist und nicht entgegengesetzt.) Es gilt daher (40), (41). Aus der 1. und 4. Gleichung (38) folgt mit $x'' = 0$ (42). Rollenvertauschung des einfach- und doppeltgestrichenen Systems ergibt (43), also (44). Hienach folgt (45) oder (46). Hieraus schliesst man (47), wo k eine Konstante ist. Die Transformation hat nunmehr die Form (48), wobei die Indizes 1 bzw. 2 wieder weggelassen sind. Es ist noch e_1 zu bestimmen. O' bewegt sich in S gleichförmig, d. h. für $x' = 0$ gilt (49). Dabei muss aber gemäss unserer Definition der Gleichförmig-

keit auch die mitbewegte Uhr gleiche Zeitabschnitte bei der Begegnung äquidistanter Punkte der X-Achse anzeigen, d. h. es gilt die Proportionalität (50). Setzt man (49) in die 4. Gleichung (48) ein, so kommt (51). Die Einsetzung des Wertes von x nach (50) ergibt (52). Das kann aber für jedes t' nur gelten, wenn (53), also auch (54) ist. Wir erhalten also schliesslich die Transformation (55), wo nur noch die Konstante k unbekannt ist. Für $k = 0$ erhält man die Galileitransformation, d. h. die klassische Kinematik.

In bekannter Schlussweise erhält man nun leicht das Additionstheorem der Geschwindigkeiten (57), die Formel (60) für die Länge eines bewegten Stabes und den Ausdruck (61) für die Eigenzeit einer bewegten Uhr.

Die Konstante k könnte prinzipiell aus einem kinematischen Versuch ermittelt werden, z. B. durch Bestimmung der Länge eines bewegten Stabes, und wäre dann nach (62) berechenbar. Wegen der Kleinheit des aus elektromagnetischen Betrachtungen bekannten Wertes (63) für k ist dieser Weg bei der heutigen Genauigkeit solcher Messungen natürlich nicht gangbar. Die Einsetzung des Wertes (63) verleiht den Gleichungen (55), (57), (60), (61) ihre bekannte Form (Lorentztransformation, Einsteinsches Additionstheorem, Lorentzkontraktion, Zeitdilatation).

Zum Schluss sei noch auf eine andere Variante der Grundvoraussetzungen hingewiesen. Da man bei der Betrachtung über die Synchronisierung der Uhren nur die Isotropie des Raumes braucht, nicht aber die Gleichförmigkeit der Bewegung der Teilchen (sie könnten sich z. B. in allen Richtungen gleichförmig beschleunigt bewegen), so kann man bei der Definition der Gleichförmigkeit bereits synchronisierte Uhren voraussetzen und daher die Gleichförmigkeit mittels der Systemuhren anstatt mittels der mitgeführten Uhr definieren. Die Überlegung, das die beiden Definitionen gleichwertig sind, lässt sich dann umkehren. Dabei entfällt sogar die Voraussetzung, dass zwei gleichzeitig entsandte Teilchen zu verschiedenen Zeiten eintreffen, wenn ihre Uhren verschiedene Reisezeiten anzeigen. Statt dessen schliesst man, dass die Uhren zweier gleichzeitig entsandter Teilchen, die gleichzeitig eintreffen, gleiche Reisezeiten anzeigen. Das ist aber selbstverständlich, weil es sich um zwei identische Vorgänge handelt. Diese zweite Variante wäre daher vielleicht vorzuziehen, nur muss man dann vor der Formulierung der Gleichförmigkeitsvoraussetzung die Betrachtung über die Synchronisierung der Uhren durchführen.

EINIGE BEZIEHUNGEN DER KOMMUTATIVITÄTS- UND DER ASSOZIATIVITÄTSEIGENSCHAFT

Von *Vladimir Devidé, Zagreb*

1. Wir betrachten Mengen S untereinander verschiedener Elemente, in welchen eine Verknüpfungsoperation ω definiert ist, die jedem geordneten Paare A, B der Elemente von S ein eindeutig bestimmtes Element C dieser Menge zuordnet:

$$AB = C; \quad A, B, C \in S. \tag{1}$$

Die Operation ω habe die Eigenschaft, dass in bezug auf sie S ein solches Element E enthält, dass für jedes Element A von S

$$AE = EA = A \tag{2}$$

gilt.

2. Der Kürze und Übersichtlichkeit der Darstellung halber wollen wir zuerst einige Benennungen und Bezeichnungen einführen.

a) Ist ω kommutativ, d. h. ist für irgend welche Elemente von S

$$AB = BA \tag{3}$$

so sagen wir, ω habe die Eigenschaft (k) und schreiben $\omega(k)$.

b) Ist ω assoziativ, d. h. ist für irgend welche Elemente von S

$$(AB)\,C = A\,(BC) \tag{4}$$

so sagen wir, ω habe die Eigenschaft (a) und schreiben $\omega(a)$.

c) Ist für die Operation ω stets

$$\Pi_1(A, B, C, \ldots) = \Pi_2(M, N, O, \ldots) \tag{5}$$

wo die Π (Π_1, Π_2) zwei Produkte von endlicher Anzahl m allgemeiner Elemente sind, so sagen wir ω habe die Eigenschaft (π) und schreiben $\omega(\pi)$. Dabei setzen wir voraus, dass nicht $\Pi_1 \equiv \Pi_2$ ist, d. h. dass die linke und rechte Seite der Relation (5) nicht formal identisch sind, dass sie also nicht dieselben allgemeinen Elemente in derselben Reihenfolge und mit gleicher Anordnung von Klammern enthalten.

Aus $\Pi_1 \equiv \Pi_2$ kann offenbar keine spezielle Eigenschaft von ω folgen, da eine solche Relation immer erfüllt ist; es wäre also nicht von Interesse sie in die Betrachtungen einzubeziehen. Die einzige *eigentliche* Beschränkung welche für die Π aufgestellt wird, ist die folgende: Ein Element kann als *allgemeines* Element (an Stelle von welchen jedes Element von S eingeführt werden kann) in einem Π höchstens einmal vorkommen.

m kann gewiss auch grösser sein als die Anzahl der Elemente von S; in diesem Falle wird bei der Einführung von *bestimmten* Elementen an die Stelle von *allgemeinen* allerdings wenigstens eines von diesen bestimmten, speziellen Elementen mehr als einmal vorkommen. Selbstverständlich schliesst das die obere Beschränkung nicht aus.

Ein Produkt Π kann also z. B. eine der folgenden Formen haben:

(6) $$\Pi = (BA)\,[F\,(CD)]\,, \quad \Pi = C\,\{[(AD)\,(BH)]\,(FG)\} \text{ usw.}$$

d) Ist $\omega(\pi)$ eine *direkte* Folge der Voraussetzung dass $\omega(k)$ ist, d. h. unterscheidet sich in (5) Π_1 von Π_2 nur durch die Anordnung der Faktoren in einigen entsprechenden Klammern — wie z. B. in der Relation

(7) $$[F\,(AB)]\,(CD) = (CD)\,[F\,(BA)]$$

— so schreiben wir $(k:\pi)$; ist dies nicht der Fall — wie z. B. in der Relation (9) und in

(8) $$(CA)\,(DB) = D\,[B\,(AC)]$$

— so schreiben wir $\overline{(k:\pi)}$.

e) Ist $\omega(\pi)$ eine *direkte* Folge der Voraussetzung dass $\omega(a)$ ist, d. h. unterscheidet sich in (5) Π_1 von Π_2 nur durch die Anordnung der Klammer — wie z. B. in der Relation

(9) $$\{[(DA)\,C]\,B\}\,(FG) = D\,\{[A\,(CB)]\,(FG)\}$$

— so schreiben wir $(a:\pi)$; ist dies nicht der Fall — wie z. B. in den Relationen (7) und (8) — so schreiben wir $\overline{(a:\pi)}$.

f) Folgt aus der Gültigkeit von $a, b, \ldots$ auch die Gültigkeit von $c, d, \ldots$ so schreiben wir $a, b, \ldots \rightarrow c, d, \ldots$; ist dies nicht der Fall, so schreiben wir $a, b, \ldots \uparrow c, d, \ldots$.

g) Jedes Klammerpaar in Π, das zwei Elemente enthält, nennen wir eine Klammer erster Ordnung. Jedes Klammerpaar, das entweder ein Element und eine Klammer erster Ordnung, oder zwei Klammern erster Ordnung enthält, nennen wir eine Klammer zweiter Ordnung. Allgemein: Jedes Klammerpaar in Π das eine Klammer p-ter Ordnung und eine Klammer q-ter Ordnung mit $0 \leqq q \leqq p$ enthält, nennen wir eine Klammer $p+1$-ter Ordnung; dabei wird, der Gleichförmigkeit der Darstellung halber, unter einer Klammer nullter Ordnung jedes einzelne Element verstanden.

3. Es ist leicht einzusehen, dass im Falle wenn $\omega(\pi)$ ist und S wenigstens zwei Elemente enthält, Π_1 und Π_2 dieselben Elemente enthalten müssen, oder, mit anderen Worten: *Mengen* S *mit wenigstens zwei Elementen, in welchen ω mit $\omega(\pi)$ definiert wäre und wo Π_1 (bzw. Π_2) auch nur ein Element enthielte, das in Π_2 (bzw. Π_1) nicht vorkommt, sind nicht realisierbar.*

Beweis. Setzen wir voraus, dass Π_1 ein Element K enthält, welches in Π_2 nicht vorkommt. Führen wir in (5) für alle Elemente ausser für K das Element E ein, und setzen an Stelle von K ein von E verschiedenes Element A — das sicher besteht, da ja S mehr als ein Element enthält — so würde

$$A = E \tag{10}$$

folgen, was der Wahl von A widerspricht. In der gleichen Weise sehen wir ein, dass auch Π_2 kein Element enthält, das nicht auch in Π_1 vorkommt.

4. *Eine Menge* S *mit $\omega(\pi)$ wo in (5) Π_1 und Π_2 dieselben Elemente enthalten, ist stets realisierbar.*

Es ist nämlich in diesem Falle offenbar $\omega(k), \omega(a) \rightarrow \omega(\pi)$. D. h. in jeder Menge S mit einer Operation ω die zugleich kommutativ und assoziativ ist — also speziell z. B. in jeder Abel'schen Gruppe — hat die Operation ω auch jede solche Eigenschaft (π). Die weiteren Ausführungen werden zeigen, dass auch Behauptungen gelten die — unter bestimmten Be-

dingungen — über die Umkehrungen dieser Tatsache Auskunft geben. (siehe Nummer 10.)

5. I. $\overline{(a:\pi)} \longrightarrow \{\omega(\pi) \longrightarrow \omega(k)\}$; d. h.

Hat ω die Eigenschaft (π) und ist die Reihenfolge der Elemente in Π_1 und Π_2 — von der Anordnung der Klammer abgesehen — nicht dieselbe, d. h. ist (5) nicht eine direkte Folge der Voraussetzung, dass ω assoziativ ist, so ist ω kommutativ.

Bevor wir auf den Beweis dieser Behauptung übergehen, erwähnen wir die Bedeutung des im 4. durchgeführten Beweises der Existenz von Mengen S mit $\omega(\pi)$, wenn nur Π_1 dieselben Elemente enthält wie Π_2. Gäbe es nämlich ausser der durch (3) gegebenen keine Realisierung einer Relation (5), in welcher wenigstens eine Inversion der Elemente in Π_1 gegenüber den Elementen in Π_2 stattfindet, so würde dies bedeuten, dass, wenn $\omega(\pi)$ ist, (π) nur die mit (3) direkt gegebene Eigenschaft (k) sein kann, und die Behauptung I. wäre trivial.

Gehen wir jetzt zum Beweis der Behauptung über.

Enthält S nur ein Element, so ist ω mit $EE = E$ gegeben und es ist $\omega(k)$.

Enthält S wenigstens zwei Elemente, so bestehen nach der Voraussetzung wenigstens zwei Elemente A, B, die in Π_1 in der umgekehrten Reihenfolge als in Π_2 vorkommen; setzen wir für alle anderen Elemente das Element E ein, so geht (5) in (3) über, und die Behauptung ist bewiesen.

Im Gegenteil, ist $(a:\pi)$, *so muss nicht* $\omega(\pi) \rightarrow \omega(k)$ *sein,* da jede Relation (5) mit $(a:\pi)$ z. B. durch irgend welche nichtkommutative Gruppe realisiert werden kann.

6. II. $\overline{(k:\pi)} \longrightarrow \{\omega(\pi) \longrightarrow \omega(a)\}$; d. h.

Hat ω die Eigenschaft (π) und ist (5) nicht eine direkte Folge der Voraussetzung dass ω kommutativ ist, so ist ω assoziativ.

Auch hier zeigt sich die Bedeutung der Existenz von Mengen S mit $\omega(\pi)$, $\overline{(k:\pi)}$ wo (5) von (4) verschieden ist. Wäre nämlich (4) die einzige realisierbare Relation für welche $\overline{(k:\pi)}$ ist, so wäre die Behauptung II. trivial.

Gehen wir jetzt zum Beweis der Behauptung über.

Enthält S nur ein Element, so ist ω mit $EE = E$ gegeben und es ist $\omega(a)$.

Die Behauptung II. ist noch zu beweisen im Falle dass S wenigstens zwei Elemente enthält. (5) kann jetzt wegen 3. nicht die Form $A = B$ haben, und es kann auch nicht die Form $A = A$ haben, da wir $\Pi_1 = \Pi_2$ ausgeschlossen haben; aus denselben Gründen müsste (5), wenn die Π je zwei Elemente enthielten, die Form $AB = BA$ haben, was aber mit den Bedingungen in II. ausgeschlossen ist. Daraus ergibt sich, dass die Π wenigstens je drei Elemente enthalten.

Aus Obigem folgt, dass Π_1 wenigstens eine Klammer erster Ordnung (AB) und wenigstens noch ein Element C enthalten muss. In Π_2 kommen dann A und B entweder *nicht* innerhalb einer und derselben Klammer erster Ordnung vor — Fall 1. — oder aber *kommen* sie innerhalb einer und derselben Klammer erster Ordnung vor — Fall 2.

Im *Falle 1.* kommt in der Klammer ζ niedrigster Ordnung > 0, welche in Π_2 A enthält, entweder auch B vor — *Fall 1b.* — oder aber kommt B in ihr nicht vor — *Fall 1a.*

Im *Falle 1a.* setzen wir in (5) für alle Elemente ausser für A, B und noch ein Element C aus ζ das Element E ein, und aus $\omega(\pi)$ erhalten wir $\omega(\pi')$, wo Π_1' eine der Formen

(11) $$C(AB),\ (AB)C,$$

und Π_2' eine der Formen

(12) $$(AC)B,\ (CA)B,\ B(AC),\ B(CA)$$

haben wird.

Die einzige Möglichkeit dass Π_1' gegenüber Π_2' keine Inversion enthält, ist durch

(13) $$C(AB) = (CA)B$$

gegeben, und es ist dann $\omega(a)$.

Wenn Π_1' gegenüber Π_2' wenigstens eine Inversion enthält, so wird nach I. $\omega(k)$ sein, und es wird auch die Relation

(14) $$(AB)C = (AC)B$$

gelten. Aus (14) folgt wegen $\omega(k)$ und (14)

(15) $$(AB)C = (AC)B = (CA)B = (CB)A = (BC)A = A(BC);$$

est ist also wieder $\omega(a)$.

Im *Falle 1b.* enthält ζ offensichtlich das Element A und eine Klammer ζ' in welcher B vorkommt. Käme nämlich A als Faktor von ζ nicht allein vor, sondern innerhalb einer Klammer ζ'' wenigstens erster Ordnung, so wäre die Ordnung von ζ'' niedriger als die Ordnung von ζ, was der Wahl von ζ widerspricht. Da ζ' nicht nullter Ordnung ist — das wäre Fall 2. — kommt in ζ' ausser B wenigstens noch ein Element C vor. Setzen wir jetzt in (5) an Stelle aller Elemente ausser A, B, C das Element E ein, so erhalten wir wieder aus (π) eine Eigenschaft (π') wo Π_1' eine der Formen (11) und Π_2' eine der Formen

$$A(BC),\ A(CB),\ (BC)A,\ (CB)A \tag{16}$$

haben wird.

Die einzige Möglichkeit, dass Π_1' gegenüber Π_2' keine Inversion enthält, ist jetzt durch

$$(AB)C = A(BC) \tag{17}$$

gegeben, und es ist dann $\omega(a)$.

Wenn Π_1' gegenüber Π_2' wenigstens eine Inversion enthält, so wird nach I. $\omega(k)$ sein, und es wird auch hier die Relation (17) gelten, d. h. es ist wieder $\omega(a)$.

Im *Falle 2.* können wir anstatt (AB) oder (BA) in Π z. B. A schreiben; damit erhalten wir aus (5) die Relation

$$\Pi_1^{(1)} = \Pi_2^{(1)}\,. \tag{18}$$

(18) kann nicht eine Identität sein, da dann entweder auch (5) eine Identität wäre, oder es würde — im Falle dass A und B in Π_2 in der Reihenfolge B, A vorkommen — für (5) $(k:\pi)$ gelten. Weiter sind offenbar auch mit (18) die Bedingungen in II. erfüllt, wenn dies mit (5) der Fall ist. Die Produkte $\Pi^{(1)}$ in (18) enthalten aber je ein allgemeines Element weniger als die Produkte Π in (5).

Jetzt können wir weiter folgern, dass auch $\Pi_1^{(1)}$ wenigstens eine Klammer erster Ordnung enthält, und verfahren wie zuvor; durch Wiederholung dieses Verfahrens kommen wir sicher einmal auf den Fall 1.: da sich nämlich beim Verfahren im Falle 2. die Anzahl der Elemente verkleinert, so kommen wir einmal — falls Fall 1. nicht schon vorgekommen ist — endlich auf die Relation

$$\Pi_1^{(m-3)} = \Pi_2^{(m-3)} \tag{19}$$

in welcher die $\Pi^{(m-3)}$ je drei Elemente enthalten. Jetzt muss aber die Bedingung für Fall 1. eintreten, da Fall 2. in (19) nur dann eintreten könnte, wenn für (19) — also auch für (5) — $(k:\pi)$ wäre.

Damit ist die Behauptung II. für jeden möglichen Fall bewiesen.

Sind die Bedingungen von II. nicht erfüllt, so muss nicht ω (a) *sein.* Dies folgt aus der Existenz der Menge S mit $\omega\,(k)$ welche durch

	E	A	B
E	E	A	B
A	A	B	B
B	B	B	A

gegeben ist und wegen

(20) $$(AB)\,B = BB = A, \quad A\,(BB) = AA = B$$

nicht assoziativ ist.

Eine Anwendung von II. wäre:

Eine Gruppe kann durch folgendes Axiomensystem definiert werden:

(G)
1. $AB = C, \quad A, B, C \,\varepsilon\, S$
2. $AE = EA = A$
3. $\Pi_1\,(A, B, C\ldots) = \Pi_2\,(M, N, O, \ldots); \ \overline{(k:\pi)}$
4. *die Gleichung* $XA = E$ *ist stets lösbar.*

Von dem üblichen Axiomensystem:

(G')
1'. $\equiv$ 1.
2'. EA = A
3'. (AB) C = A (BC)
4'. $\equiv$ 4.

unterscheidet sich (G) dadurch, dass 2. mehr als 2'. fordert, dafür aber 3. weniger als 3'. wodurch das ganze System an Symmetrie gewinnt.

7. Es gilt immer wenigstens einer der Schlüsse $\omega\,(\pi) \rightarrow \omega\,(a)$, $\omega\,(\pi) \rightarrow \omega\,(k)$; d. h.

Die Operation ω *mit der Eigenschaft* (π) *hat wenigstens eine von den Eigenschaften der Kommutativität und der Assoziativität.*

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus I. und II. und aus der Tatsache, dass $(k:\pi) \rightarrow \overline{(a:\pi)}$ ist; d. h. dass *(5) mit* $(k:\pi)$ *wenigstens eine Inversion in* Π_1 *gegenüber* Π_2 *enthält.*

Um diesen Hilfssatz zu beweisen, setzen wir voraus, dass er nicht gilt, d. h. dass eine nichtidentische Relation (5) besteht, für welche $(k:\pi)$ ist und welche keine Inversion enthält.

Da nicht $\Pi_1 = \Pi_2$ ist, müssten die Π wenigstens zwei Elemente enthalten, und in Π_1 käme wenigstens eine Klammer erster Ordnung (AB) vor. Wenn diese Elemente nicht auch in Π_2 in einer und derselben Klammer erster Ordnung enthalten wären, so könnte nicht $(k:\pi)$ sein. Da wir voraussetzten dass keine Inversion stattfindet, käme auch in Π_2 die Klammer (AB) vor, und man könnte in (5) anstatt (AB) z. B. A setzen; daraus würde aus (5) eine Relation folgen, die auch keine Identität wäre und die auf jeder Seite der Gleichung je ein Element weniger als (5) enthielte. Durch eine genügende Anzahl von Wiederholungen dieses Verfahrens erhielten wir endlich die Relation $A = A$, welche eine Identität ist was aber nach Obigem nicht sein kann.

Die Umkehrung des Hilfssatzes gilt offensichtlich nicht, da auch $\omega(\pi)$ *mit* $\overline{(a:\pi)}$, $\overline{(k:\pi)}$ *besteht* (vgl. 4. und (8)); I. sagt also mehr aus, als dass $(k:\pi) \rightarrow \{\omega(\pi) \rightarrow \omega(k)\}$ ist.

Ebenfalls sieht man wegen $(a:\pi) \rightarrow \overline{(k:\pi)}$ — was aus dem Hilfssatze folgt (da aus $(a:\pi_0)$, $(k:\pi_0)$ und $(k:\pi_0) \rightarrow \overline{(a:\pi_0)}$ auch $(a:\pi_0)$, $\overline{(a:\pi_0)}$ folgen würde was nicht möglich ist) — und der Tatsache, dass $\overline{(k:\pi)} \uparrow (a:\pi)$ ist, dass II. mehr aussagt als dass $(a:\pi) \rightarrow \{\omega(\pi) \rightarrow \omega(a)\}$ ist.

8. Mit I., II., und 7. ist bewiesen:

$$\text{III.}\quad \left\{\begin{array}{ll} a) & (a:\pi) \longrightarrow \{\omega(\pi) \longrightarrow \omega(a)\} \\ b) & (k:\pi) \longrightarrow \{\omega(\pi) \longrightarrow \omega(k)\} \\ c) & \overline{(a:\pi)}\,,\ \overline{(k:\pi)} \longrightarrow \{\omega(\pi) \longrightarrow \omega(a)\,,\ \omega(k)\} \end{array}\right.$$

Aus dem Hilfssatze in 7. folgt, dass die linken Seiten der Fälle *a*), *b*), *c*) eine totale Disjunktion bilden.

9. Offenbar ist

$$(21) \qquad (k:\pi) \rightarrow \{\omega(k) \rightarrow \omega(\pi)\}\,;$$

es ist also auch

$$(22) \qquad \{\omega(k) \uparrow \omega(\pi)\} \rightarrow \overline{(k:\pi)}\ .$$

Es gilt indes auch

$$(23) \qquad \overline{(k:\pi)} \rightarrow \{\omega(k) \uparrow \omega(\pi)\}\ .$$

Wäre nämlich (23) nicht richtig, so bedeutete dies, dass eine solche Eigenschaft (π_0) besteht, welche jede kommutative Operation ω hätte, wenn sie (d. h. ω) auch nicht assoziativ wäre, was nach II. im Falle $\overline{(k:\pi_0)}$ nicht sein kann. Aus (23) folgt weiter

$$(24) \qquad \{\omega(k) \rightarrow \omega(\pi)\} \rightarrow (k:\pi)\ .$$

Aus (21) bis (24) folgt, dass $(k:\pi)$ mit $\omega(k) \rightarrow \omega(\pi)$ und $\overline{(k:\pi)}$ mit $\omega(k) \uparrow \omega(\pi)$ gleichbedeutend ist, d. h.:

(5) ist dann und nur dann eine direkte Folge der Voraussetzung dass ω kommutativ ist, wenn (5) durch jede kommutative Operation ω in jeder Menge S befriedigt wird.

Analog folgen auch Gleichungen die wir aus (21) bis (24) erhalten, wenn wir in diesen Gleichungen k mit a vertauschen, und umgekehrt. Daraus ergibt sich:

(5) ist dann und nur dann eine direkte Folge der Voraussetzung dass ω assoziativ ist, wenn (5) durch jede assoziative Operation in jeder Menge S befriedigt wird.

10. Aus I., II. und III. ergibt sich mit 9.:

$$\text{I.'} \qquad \{\omega(k) \uparrow \omega(\pi)\} \rightarrow \{\omega(\pi) \rightarrow \omega(a)\}\,,$$

est ist also speziell wegen

$$\{\omega(a) \rightarrow \omega(\pi)\} \rightarrow (a:\pi) \rightarrow \overline{(k:\pi)} \rightarrow \{\omega(k) \uparrow \omega(\pi)\} \text{ auch}$$

$$\{\omega(a) \rightarrow \omega(\pi)\} \rightarrow \{\omega(\pi) \rightarrow \omega(a)\}\,,$$

$$\text{II.'} \qquad \{\omega(a) \uparrow \omega(\pi)\} \rightarrow \{\omega(\pi) \rightarrow \omega(k)\}\,,$$

$$\text{speziell } \{\omega(k) \rightarrow \omega(\pi)\} \rightarrow \{\omega(\pi) \rightarrow \omega(k)\}\,,$$

$$\text{III.'} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{a)} & \{\omega(a) \rightarrow \omega(\pi)\} \rightarrow \{\omega(\pi) \rightarrow \omega(a)\} \\ \text{b)} & \{\omega(k) \rightarrow \omega(\pi)\} \rightarrow \{\omega(\pi) \rightarrow \omega(k)\} \\ \text{c)} & \{\omega(a) \uparrow \omega(\pi)\}\,, \{\omega(k) \uparrow \omega(\pi)\} \rightarrow \{\omega(\pi) \rightarrow \omega(a)\,, \omega(k)\}. \end{array} \right.$$

I.' und II.' kann jetzt auch so formuliert werden:

Besteht auch nur eine Menge S, in welcher eine kommutative Operation ω *definiert ist, die die Eigenschaft* (π) *nicht besitzt, so ist jede Operation* ω *in irgend einer Menge S, für welche* $\omega\,(\pi)$ *ist, auch assoziativ.*

Ist dagegen (5) durch jede kommutative Operation ω *in jeder Menge S befriedigt, so ist jede Operation* ω *in irgend einer Menge, für die* $\omega\,(\pi)$ *ist, auch kommutativ.*

Besteht auch nur eine Menge S, in welcher eine assoziative Operation ω *definiert ist, die die Eigenschaft* (π) *nicht besitzt, so ist jede Operation* ω *in irgend einer Menge S, für welche* $\omega\,(\pi)$ *ist, auch kommutativ.*

Ist dagegen (5) durch jede assoziative Operation ω *in jeder Menge S befriedigt, so ist jede Operation* ω *in irgend einer Menge, für die* $\omega\,(\pi)$ *ist, auch assoziativ.*

Aus III.' folgt weiter:

Es sei ω_k *irgend eine spezielle kommutative, aber nicht assoziative Operation in irgend einer speziellen Menge S;* ω_a *sei entsprechend irgend eine spezielle assoziative, aber nicht kommutative Operation in irgend einer speziellen Menge S.*

Hat dann ω_k *die Eigenschaft* (π)*, so hat dieselbe Eigenschaft auch jede kommutative Operation in jeder Menge S, aber keine nichtkommutative, da nach 8. die linken Seiten von III'. eine totale Disjunktion bilden und a) und c) hier ausgeschlossen ist; analog, hat* ω_a *die Eigenschaft* (π)*, so hat dieselbe Eigenschaft auch jede assoziative Operation in jeder Menge S, aber keine nichtassoziative.*

Die obigen Ausführungen und die bewiesenen Sätze sind vielleicht geeignet, die Tragweite der Eigenschaften der Kommutativität und der Assoziativität einer Operation mit einem Einheitselement noch von einer Seite her näher zu beleuchten.

NEKI ODNOSI SVOJSTAVA KOMUTATIVITETA I ASOCIJATIVITETA

Vladimir Devidé, Zagreb

Sadržaj

1. Promatrat ćemo skupove S međusobno različitih elemenata u kojima je definirana operacija spajanja ω koja svakom uređenom paru A, B elemenata skupa S pridjeljuje jednoznačno određen elemenat C toga skupa (1). Operacija ω neka je takova, da obzirom na nju S sadrži takav elemenat E, da za svaki elemenat A skupa S vrijedi (2).

2. Uvest ćemo neke oznake i nazive.

a) Ako je operacija ω komutativna, t. j. ako je (3), reći ćemo da ω ima svojstvo (k) i pisati ω (k).

b) Ako je operacija ω asocijativna, t. j. ako je (4), reći ćemo da ω ima svojstvo (a) i pisati ω (a).

c) Ako za operaciju ω uvijek vrijedi (5), gdje su Π (Π_1, Π_2) dva produkta od konačnoga broja $m \cdot$ općih elemenata, reći ćemo da ω ima svojstvo (π) i pisati ω (π). Pretpostavljamo da nije $\Pi_1 \equiv \Pi_2$, t. j. da lijeva i desna strana relacija (5) ne sadrže iste opće elemente istim redoslijedom sa jednakim rasporedom zagrada (kojima je određen redoslijed multiplikacija). Jedino *stvarno* ograničenje koje ćemo staviti na oblik produkata Π bit će u tome, što ćemo dopustiti da neki elemenat (kao *opći* elemenat za koji može biti uvršten bilo kojih elemenat od S) dolazi u Π najviše jedamput. Prema tome produkt Π može na pr. imati jedan od oblika (6).

d) Ako je ω (π) *direktna* posljedica pretpostavke da je ω (k), t. j. ako se u (5) Π_1 od Π_2 razlikuje samo poretkom elemenata unutar nekih odgovarajućih zagrada — kao na pr. u relaciji (7) — pisat ćemo ($k : \pi$); ako to nije slučaj — kao na pr. u relacijama (8) i (9) — pisat ćemo $\overline{(k : \pi)}$.

e) Ako je ω (π) *direktna* posljedica pretpostavke da je ω (a), t. j. ako se u (5) Π_1 od Π_2 razlikuje samo razdiobom zagrada — kao na pr. u relaciji (9) — pisat ćemo ($a : \pi$); ako to nije slučaj — kao na pr. u relacijama (7) i (8) — pisat ćemo $\overline{(a : \pi)}$.

f) Ako u slučaju, da je u isti mah ispunjeno $a, b, \ldots$ slijedi da tada vrijedi i $c, d, \ldots$ pisat ćemo $a, b, \ldots \rightarrow c, d, \ldots$; ako to nije slučaj pisat ćemo $a, b, \ldots \uparrow c, d, \ldots$.

g) Svaki par zagrada u Π koji sadrži dva elementa zvat ćemo zagradom prvog reda. Svaki par zagrada koji sadrži jednu zagradu p-tog reda i jednu zagradu q-tog reda, $0 \leqq q \leqq p$, zvat ćemo zagradom $p+1$-og reda; pri tome se zagradom nultog reda smatra svaki pojedini elemenat.

3. *Ako je $\omega(\pi)$ i ako* S *sadrži bar dva elementa, Π_1 i Π_2 moraju sadržavati iste opće elemente, ili, drugim riječima: skupovi* S *od barem dva elementa za koje bi bilo $\omega(\pi)$ i gdje bi Π_1 (odn. Π_2) sadržavao makar jedan elemenat kojeg Π_2 (odn. Π_1) ne sadrži, ne mogu se realizirati.*

Kad bi naime postojala neka takova relacija (5), dobili bismo — stavljajući za elemenat koji ne dolazi na obje strane elemenat E, a za sve ostale opće elemente neki od E različiti elemenat A — da vrijedi (10), što ne može biti.

4. *Skup* S *s $\omega(\pi)$, gdje Π_1 i Π_2 sadrže iste elemente, može se uvijek realizirati.*

Stvarno: $\omega(k),\ \omega(a) \rightarrow \omega(\pi)$, t. j. u svakom skupu S s operacijom ω koja je i komutativna i asocijativna — dakle specijalno na pr. u svakoj Abelovoj grupi — imat će operacija ω i svako takovo svojstvo (π).

5. Vrijedi tvrdnja I., t. j.

Ako ω ima svojstvo (π) i ako redoslijed elemenata u Π_1 i Π_2 — ne uzevši u obzir zagrade — nije isti, t. j. ako (5) nije direktna posljedica pretpostavke da je ω asocijativno, onda je ω komutativno.

Dokaz. Ako S sadrži samo jedan elemenat, onda je ω dano sa $EE = E$, pa je $\omega(k)$. Ako S sadrži bar dva elementa, onda po pretpostavci postoje bar dva opća elementa koji u Π_1 dolaze obratnim redoslijedom nego u Π_2; uvrstimo li za sve ostale elemente elemenat E, prelazi (5) u (3) pa je tvrdnja dokazana.

Naprotiv, $(a:\pi) \uparrow \{\omega(\pi) \rightarrow \omega(k)\}$, jer se svaka relacija (5) sa $(a:\pi)$ može realizirati na pr. bilo kojom nekomutativnom grupom.

6. Vrijedi tvrdnja II., t. j.

Ako ω ima svojstvo (π) i ako (5) nije direktna posljedica pretpostavke da je ω komutativno, onda je ω asocijativno.

Dokaz. Ako S sadrži samo jedan elemenat, onda je ω sigurno asocijativno.

Ako S sadrži bar 2 elementa, (5) zbog 3. ne može imati oblik $A = B$, a ne može imati ni oblik $A = A$, jer smo $\Pi_1 = \Pi_2$ isključili; iz istih razloga moralo bi (5), ako Π sadrže po 2 elementa, imati oblik $AB = BA$ no to je uvjetima u II. isključeno. Prema tome Π sadrže bar po tri elementa.

Odatle slijedi da Π_1 mora sadržavati bar jednu zagradu prvog reda (AB) i bar još jedan elemenat C. U Π_2 se onda A i B ili *ne nalaze* unutar jedne te iste zagrade prvog reda — *slučaj 1.* — ili se oni *nalaze* unutar jedne te iste zagrade prvog reda — *slučaj 2.*

U *slučaju 1.* zagrada ζ najnižeg reda > 0 koja u Π_2 uključuje A ili ne uključuje B — *slučaj 1a.* — ili uključuje i B — *slučaj 1b.*

U *slučaju 1a.* stavimo u (5) za sve elemente osim za A, B i još neki elemenat C iz ζ elemenat E, pa ćemo iz $\omega\,(\pi)$ dobiti $\omega\,(\pi')$ gdje će Π_1' imati jedan od oblika (11), a Π_2' jedan od oblika (12). Jedina mogućnost da Π_1' prema Π_2' ne sadrži ni jedne inverzije je (13); ovdje je $\omega\,(a)$. Ako Π_1' prema Π_2' sadrži bar jednu inverziju bit će prema I. $\omega\,(k)$, pa će vrijediti i (14) odakle zbog $\omega\,(k)$ i (14) slijedi (15) pa je opet i $\omega\,(a)$.

U *slučaju 1b.* ζ očito sadrži elemenat A i jednu zagradu ζ' koja sadrži B. Da naime A kao faktor od ζ dolazi unutar neke zagrade ζ'' bar prvoga reda, bio bi red od ζ'' niži nego li red od ζ što se protivi izboru ζ. Budući da ζ' nije nultoga reda — to bi bio slučaj 2. — naći ćemo u ζ' osim B bar još jedan elemenat C. Stavimo li sada u (5) za sve elemente osim za A, B, C elemenat E, dobit ćemo opet iz (π) neko svojstvo (π') gdje će Π_1' imati jedan od oblika (11), a Π_2' jedan od oblika (16). Jedina mogućnost da Π_1' prema Π_2' ne sadrži ni jedne inverzije je sada (17); ovdje je $\omega\,(a)$. Ako Π_1' prema Π_2' sadrži bar jednu inverziju bit će prema I. $\omega\,(k)$, pa će i ovdje vrijediti (17), t. j. opet je $\omega\,(a)$.

U *slučaju 2.* možemo umjesto (AB) ili (BA) u Π pisati na pr. A, pa ćemo time iz (5) dobiti (18). Ako (5) zadovoljava uslove za (π) iz II., zadovoljavat će ih očito i (18). Nadalje, (18) ne može biti identična relacija, jer bi onda ili i (5) bila identična relacija, ili bi za (5) vrijedilo $(k:\pi)$. Međutim, produkti $\Pi^{(1)}$

u (18) sadrže po jedan opći elemenat manje nego produkti Π. Sada opet možemo zaključiti da produkti $\Pi^{(1)}$ sadrže bar po jednu zagradu prvog reda i bar još jedan elemenat i postupiti kao ranije; ponavljanjem toga postupka doći ćemo sigurno jedamput do slučaja 1. Kako se naime postupkom u slučaju 2. broj elemenata smanjuje, doći ćemo jednom — u koliko nije već ranije nastupio slučaj 1. — konačno do relacije (19) u kojoj $\Pi^{(m-3)}$ sadrže po tri elementa. No sada mora biti ispunjen uvjet slučaja 1. jer bi slučaj 2. mogao nastupiti jedino kad bi za (19) — dakle i za (5) — bilo $(k:\pi)$.

Time je tvrdnja II. dokazana za svaki mogući slučaj.

Naprotiv, *ako uvjeti od II. nisu ispunjeni, ne mora biti* $\omega(a)$. Ovo slijedi iz egzistencije skupova S sa ω za koje je $\omega(k)$, a nije $\omega(a)$; jedan takav skup dan je pod kraj točke 6.

Jedna primjena od II. je ova:

Grupa može biti definirana sustavom aksioma (G) koji se od uobičajenog (G') razlikuje u tome što 2. traži više nego 2'. ali zato 3. manje nego li 3'. čime cijeli sistem dobiva na simetriji.

7. *Operacija* ω *svojstva* (π) *ima i bar jedno od svojstava komutativiteta i asocijativiteta.*

Ova tvrdnja slijedi neposredno iz I. i II. te iz činjenice da je $(k:\pi) \to \overline{(a:\pi)}$, t. j. da *(5) uz* $(k:\pi)$ *sadrži bar jednu inverziju u* Π_1 *prema* Π_2.

Da bismo dokazali ovaj pomoćni stavak, pretpostavimo da on ne vrijedi, t. j. pretpostavimo da postoji neidentična relacija (5) za koju je $(k:\pi)$, a koja ne sadrži ni jedne inverzije.

Jer nije $\Pi_1 \equiv \Pi_2$ moraju Π sadržavati bar po dva elementa, pa se u Π_1 nalazi bar jedna zagrada prvog reda (AB). Ako ti elementi u Π_2 ne bi bili sadržani također u jednoj te istoj zagradi prvog reda, ne bi moglo biti $(k:\pi)$. Jer smo pretpostavili da inverzije nema, dolazi dakle i u Π_2 zagrada (AB) pa u (5) mjesto (AB) možemo staviti na pr. A; time iz (5) slijedi relacija koja također ne će biti identitet, a na svakoj strani sadržavat će po jedan elemenat manje nego (5). Ponovimo li dovoljan broj puta taj postupak, došli bismo napokon do relacije $A = A$ koja je identitet što prema gornjem nije moguće pa je pomoćni stavak dokazan.

Dalje iz pomoćnog stavka slijedi da vrijedi i $(a : \pi) \rightarrow \overline{(k : \pi)}$. (Jer bi iz $(a : \pi_0)$, $(k : \pi_0)$ zbog $(k : \pi_0) \rightarrow \overline{(a : \pi_0)}$ slijedilo $(a : \pi_0)$, $\overline{(a : \pi_0)}$ što ne može biti.)

8. Iz I., II. i 7. slijedi III. Iz pomoćnog stavka u 7. izlazi da lijeve strane slučajeva a), b), c) čine totalnu disjunkciju.

9. Očito je (21) pa je i (22). Vrijedi međutim i (23), jer kad bi postojalo neko svojstvo $\overline{(k : \pi_0)}$ koje bi imala svaka makar i neasocijativna komutativna operacija, protivilo bi se to tvrdnji II. Iz (23) slijedi dalje (24).

Iz (21) do (24) slijedi da je $(k : \pi)$ ekvivalentno sa $\omega(k) \rightarrow \rightarrow \omega(\pi)$ a $\overline{(k : \pi)}$ sa $\omega(k) \uparrow \omega(\pi)$ t. j.

(5) je onda i samo onda direktna posljedica pretpostavke da je ω komutativno, ako (5) zadovoljava svaka komutativna operacija ω u svakom skupu S.

Analogno slijede jednadžbe koje dobivamo iz (21) do (24) ako tamo k zamijenimo sa a i obratno. Odatle slijedi:

(5) je onda i samo onda direktna posljedica pretpostavke da je ω asocijativno, ako (5) zadovoljava svaka asocijativna operacija ω u svakom skupu S.

10. Iz I., II., III. i 9. slijedi I.', II.' i III.'

I.' i II.' može se formulirati i ovako:

Ako postoji makar jedan skup S *u kojem je definirana jedna* $\left\{\begin{matrix}\textit{komutativna}\\ \textit{asocijativna}\end{matrix}\right\}$ *operacija ω koja nema svojstvo (π), onda je svaka operacija ω u bilo kojem skupu* S *koja ima svojstvo (π)* $\left\{\begin{matrix}\textit{asocijativna}\\ \textit{komutativna}\end{matrix}\right\}$.

Ako naprotiv svaka $\left\{\begin{matrix}\textit{komutativna}\\ \textit{asocijativna}\end{matrix}\right\}$ *operacija ω u svakom skupu* S *zadovoljava (5), onda je svaka operacija ω u bilo kojem skupu* S *koja ima svojstvo (π)* $\left\{\begin{matrix}\textit{komutativna}\\ \textit{asocijativna}\end{matrix}\right\}$.

Iz III.' dalje slijedi:

Neka je $\left\{\begin{matrix}\omega_k\\ \omega_a\end{matrix}\right\}$ *bilo koja specijalna* $\left\{\begin{matrix}\textit{komutativna}\\ \textit{asocijativna}\end{matrix}\right\}$ *ali ne* $\left\{\begin{matrix}\textit{asocijativna}\\ \textit{komutativna}\end{matrix}\right\}$ *operacija u bilo kojem specijalnom skupu* S.

Ako onda $\left\{ \begin{matrix} \omega_k \\ \omega_a \end{matrix} \right\}$ *ima svojstvo* (π), *onda to svojstvo ima i svaka* $\left\{ \begin{matrix} \textit{komutativna} \\ \textit{asocijativna} \end{matrix} \right\}$ *operacija* ω *u svakom skupu* S, *ali ni jedna* $\left\{ \begin{matrix} \textit{nekomutativna} \\ \textit{neasocijativna} \end{matrix} \right\}$.

Gornji izvodi i dokazani stavci možda omogućuju da se s još jedne strane učini razumljivijom širina, koja je obuhvaćena svojstvima komutativiteta i asocijativiteta neke operacije s jediničnim elementom.

(Primljeno 29. VII. 1950.)

ÜBER DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN DREI DIRACSCHEN MATRIZEN

Von *V. S. Vrkljan, Zagreb*

Bekanntlich bestehen zwischen den Diracschen Matrizen die von P. A. M. Dirac aufgestellten Beziehungen, welche aussagen, dass das Quadrat jeder Matrix eine Einheitsmatrix ist und dass die Produkte zweier solchen Matrizen antikommutativ sind. Man kann aber auch andere Beziehungen[1]) zwischen den Diracschen Matrizen ableiten und der Zweck dieser Abhandlung ist, bestimmte solche Beziehungen zwischen den ersten drei Diracschen Matrizen zu deduzieren.

Da für die Methode des Darwinschen Wellenpaketes hinreichend ist, dass in den Diracschen Gleichungen unter den Ableitungen nach den Koordinaten nur die »grossen« Wellenfunktionen auftreten, oder dass man die Ableitungen der »kleinen« Wellenfunktionen nach den Koordinaten — wenn sie doch vorkommen — nachträglich bei den Berechnungen wegschaffen kann [vgl. z. B. die Matrizen (16)], so sind die Matrizen passend zu wählen. Deswegen werden die genannten Beziehungen nicht ganz allgemein abgeleitet, die Matrizen sollen jedoch in Beziehung zur Darwinschen Methode nach Möglichkeit ziemlich allgemein gewählt sein.

I. Wir wählen zuerst die Diracschen Matrizen in folgender Form

$$\alpha = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \beta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \beta_{13} & \beta_{14} \\ 0 & 0 & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 0 & 0 \\ \beta_{41} & \beta_{42} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \gamma = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ 0 & 0 & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & 0 & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \vartheta = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

und setzen dabei voraus, dass die ersten drei den Diracschen Bedingungen genügen (für die Produkte der ersten drei Matrizen mit der vierten überzeugen wir uns leicht, dass

dieselben den Diracschen Bedingungen genügen). Dies bedeutet, dass wir die Existenz der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=3}^{4} \alpha_{\rho\sigma}\alpha_{\sigma\lambda} &= \begin{cases} 1 \; (\varrho = \lambda = 1, 2) \\ 0 \; (\varrho \neq \lambda) \end{cases} \\ \sum_{\sigma=1}^{2} \alpha_{\rho\sigma}\alpha_{\sigma\lambda} &= \begin{cases} 1 \; (\varrho = \lambda = 3, 4) \\ 0 \; (\varrho \neq \lambda) \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

voraussetzen und analog für β und γ (d. h., wenn wir in den Gleichungen (2) β und γ statt α schreiben würden). Zugleich setzen wir auch die Existenz der Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=3}^{4} \beta_{\rho\sigma}\alpha_{\sigma\lambda} &= -\sum_{\sigma=3}^{4} \alpha_{\rho\sigma}\beta_{\sigma\lambda} \qquad (\varrho, \lambda = 1, 2) \\ \sum_{\sigma=1}^{2} \beta_{\rho\sigma}\alpha_{\sigma\lambda} &= -\sum_{\sigma=1}^{2} \alpha_{\rho\sigma}\beta_{\sigma\lambda} \qquad (\varrho, \lambda = 3, 4) \end{aligned} \tag{3}$$

voraus, in welchen wir die Symbole α, β und γ durch zyklische Vertauschung ersetzt denken können.

Die zwei ersten Diracschen Gleichungen, auf Grund der Matrizen (1) aufgeschrieben, geben dann in Newtonscher Näherung

$$\Psi_\rho = \frac{1}{2\,m_0 c} \cdot \frac{\hbar}{i} \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\sigma=3}^{4} (\alpha_\mu)_{\rho\sigma} \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x_\mu} \tag{4}$$

$$(\varrho = 1, 2\,;\; x_\mu = x, y, z,\; \alpha_\mu = \alpha, \beta, \gamma,\; \text{für}\;\; \mu = 1, 2, 3)$$

Wen wir auf diese Gleichungen die »grossen« Wellenfunktionen $\Psi_{3,4}$ in der Form der Darwinschen Wellenpakete[2]) anwenden, so erhalten wir für $t = 0$ und in Newtonscher Näherung folgende Ausdrücke für die »kleinen« Komponenten des Spinors

$$\Psi_\rho = \frac{1}{2\,m_0 c} \left\{ \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\sigma=3}^{4} (\alpha_\mu)_{\rho\sigma} A_\sigma \left(p_\mu - \frac{\hbar x_\mu}{i R^2} \right) \right\} P \tag{5a}$$

$$(\varrho = 1, 2\,;\; x_\mu = x, y, z,\; \alpha_\mu = \alpha, \beta, \gamma,\; p_\mu = p_x, p_y, p_z \;\text{für}\;\; \mu = 1, 2, 3)$$

und als die ihnen konjugiert-komplexen Wellenfunktionen (unter denselben Bedeutungen für ϱ, x_μ, α_μ, p_μ und μ)

$$\overset{*}{\Psi'}_\rho = \frac{1}{2\,m_0\,c}\left\{\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\sigma=3}^{4}(\alpha_\mu)_{\rho\sigma}\overset{*}{A}_\sigma\left(p_\mu + \frac{\hbar\,x_\mu}{iR^2}\right)\right\}\overset{*}{P}. \tag{5b}$$

Hier bedeutet P den Ausdruck $e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2R^2}}\,e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_y y + p_z z)}$

und $\overset{*}{P}$ den zu ihm konjugiert-komplexen Ausdruck. Wenn wir die Ausdrücke für $\Psi'_{1,2}$ in der Form der bekannten Darwinschen Wellenpakete auf die Gleichungen für die Komponenten der statistischen Dichte des elektrischen Stromes

$$j_x = \varepsilon\,c\sum_{\rho=1}^{4}\overset{*}{\Psi'}_\rho\left\{\sum_{\sigma=3}^{4}(\alpha)_{\rho\sigma}\Psi'_\sigma\right\}\text{u. s. w.} \tag{6}$$

(im Ausdruck für j_y bzw. j_z kommt β bzw. γ statt α) anwenden, so erhalten wir (nach Zwischenrechnungen, welche der Kürze halber ausbleiben mögen) z. B. für die x-Komponente der statistischen Dichte des elektrischen Stromes

$$\begin{aligned} j_x = \Bigg\{ &(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\,\varepsilon v_x + \\ &+ \frac{\varepsilon\hbar}{4\,m_0}\,i\left[\sum_{\rho=3}^{4}\sum_{\lambda=3}^{4}\overset{*}{A}_\rho A_\lambda\sum_{\sigma=1}^{2}(\beta_{\rho\sigma}\alpha_{\sigma\lambda} - \alpha_{\rho\sigma}\beta_{\sigma\lambda})\right]\frac{\partial}{\partial y} - \\ &- \frac{\varepsilon\hbar}{4m_0}\,i\left[\sum_{\rho=3}^{4}\sum_{\lambda=3}^{4}\overset{*}{A}_\rho A_\lambda\sum_{\sigma=1}^{2}(\alpha_{\rho\sigma}\gamma_{\sigma\lambda} - \gamma_{\rho\sigma}\alpha_{\sigma\lambda})\right]\frac{\partial}{\partial z}\Bigg\}\,e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} \end{aligned} \tag{7}$$

Die Komponenten j_y und j_z ergeben sich daraus durch zyklische Vertauschung von $\alpha \to \beta \to \gamma$ und $v_x \to v_y \to v_z$.

Vergleichen wir die letzte aufgeschriebene Gleichung mit den Diracschen Bedingungen (3), so können wir sie leicht in der Form

$$\begin{aligned} j_x = \Bigg\{ &(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\,\varepsilon v_x + \frac{\varepsilon\hbar}{2\,m_0}\,i\left[\sum_{\rho=3}^{4}\sum_{\lambda=3}^{4}(\beta\,\alpha)_{\rho\lambda}\overset{*}{A}_\rho A_\lambda\right]\frac{\partial}{\partial y} - \\ &- \frac{\varepsilon\hbar}{2\,m_0}\,i\left[\sum_{\rho=3}^{4}\sum_{\lambda=3}^{4}(\alpha\,\gamma)_{\rho\lambda}\overset{*}{A}_\rho A_\lambda\right]\frac{\partial}{\partial z}\Bigg\}\,e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} \end{aligned} \tag{8}$$

aufschreiben, während sich die anderen zwei Komponenten durch die oben erwähnte zyklische Vertauschung leicht ergeben.

Nach dem bekannten Verfahren[3]) können wir daraus sehr leicht schliessen auf die Komponenten des magnetischen Momentes der Partikel

$$\mathfrak{M}_x = \frac{\varepsilon \hbar}{2 m_0} i \sum_{\rho=3}^{4} \sum_{\lambda=3}^{4} (\gamma\beta)_{\rho\lambda} \overset{*}{A}_\rho A_\lambda \int e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} d\tau \text{ u. s. w.} \tag{9}$$

bzw. nach der Normierung

$$\mathfrak{M}_x = \frac{\varepsilon \hbar}{2 m_0} i \frac{\sum_{\rho=3}^{4} \sum_{\lambda=3}^{4} (\gamma\beta)_{\rho\lambda} \overset{*}{A}_\rho A_\lambda}{\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4} \text{ u. s. w.} \tag{10}$$

Durch Quadrieren und Summieren der Ausdrücke für $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$ und $\mathfrak{M}_z$ erhalten wir, wie bekannt, den Quadrat des Betrages des magnetischen Momentes des Elektrons und des Positrons. Dies führt zu den sieben Relationen zwischen den Elementen einzelner Produkte der ersten drei Matrizen (1)

$$\begin{gathered}
\sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\gamma\beta)^2_{33} = -1, \qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\gamma\beta)_{44} = -1 \\
\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \{(\gamma\beta)_{33} (\gamma\beta)_{44} + (\gamma\beta)_{34} (\gamma\beta)_{43}\} = -1 \\
\sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\gamma\beta)_{33} (\gamma\beta)_{34} = 0, \qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\gamma\beta)_{33} (\gamma\beta)_{43} = 0 \\
\sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\gamma\beta)_{34} (\gamma\beta)_{44} = 0, \qquad \sum_{\alpha,\beta,\gamma} (\gamma\beta)_{43} (\gamma\beta)_{44} = 0
\end{gathered} \tag{11}$$

wo sich das Summieren auf zyklische Vertauschung über α, β und γ erstreckt.

Wenn wir aber statt $\Psi_{3,4}$ die Wellenfunktionen $\Psi_{1,2}$ als »grosse« Wellenfunktionen wählen würden [zugleich vor den Elementen in der vierten Matrix (1) gerade die umgekehrten Vorzeichen vorausgesetzt], so würden wir zu den ganz analogen Gleichungen wie (11) kommen, es würden nur statt den Indexen 3, 4 die Indexe 1, 2 vorkommen.

II. Als zweites Beispiel wählen wir die Matrizen

$$\alpha = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{Vmatrix} \beta = \begin{Vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \beta_{34} \\ 0 & 0 & \beta_{43} & \beta_{44} \end{Vmatrix} \gamma = \begin{Vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & 0 & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ 0 & 0 & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{Vmatrix} \vartheta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & (-1)^k \\ 0 & 0 & (-1)^l & 0 \\ 0 & (-1)^l & 0 & 0 \\ (-1)^k & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (12)$$

wo k und l beliebige positive ganze Zahlen bedeuten sollen, und setzen wir weiter voraus, dass dieselben den Bedingungen

$$\sum_{\sigma=1}^{2} \alpha_{\varrho\sigma}\alpha_{\sigma\lambda} = \begin{cases} 1 \ (\varrho = \lambda = 1, 2) \\ 0 \ (\varrho \neq \lambda), \end{cases} \qquad \sum_{\sigma=3}^{4} \alpha_{\varrho\sigma}\alpha_{\sigma\lambda} = \begin{cases} 1 \ (\varrho = \lambda = 3, 4) \\ 0 \ (\varrho \neq \lambda) \end{cases} \qquad (13)$$

$$\sum_{\sigma=1}^{2} \beta_{\varrho\sigma}\alpha_{\sigma\lambda} = -\sum_{\sigma=1}^{2} \alpha_{\varrho\sigma}\beta_{\sigma\lambda} \quad (\varrho, \lambda = 1, 2),$$

$$\sum_{\sigma=3}^{4} \beta_{\varrho\sigma}\alpha_{\sigma\lambda} = -\sum_{\sigma=3}^{4} \alpha_{\varrho\sigma}\beta_{\sigma\lambda} \quad (\varrho, \lambda = 3, 4)$$

genügen; durch diese Voraussetzungen erzielen wir, dass die Matrizen (12) den Diracschen Bedingungen genügen. Wenn wir wieder die Wellenfunktionen $\Psi_{3,4}$ als die »grossen« Wellenfunktionen in der Form der Darwinschen Wellenpakete anwenden wollen, so müssen wir jetzt von der dritten und vierten [auf Grund der Matrizen (12) aufgeschriebenen] Diracschen Gleichung Gebrauch machen. Dies ergibt dann in Newtonscher Näherung

$$\Psi_1 = -(-1)^k \left\{ \frac{1}{m_0 c} \cdot \frac{\hbar}{i} \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\sigma=3}^{4} (\alpha_\mu)_{1\sigma} \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x_\mu} - \Psi_4 \right\},$$

$$\Psi_2 = -(-1)^l \left\{ \frac{1}{m_0 c} \cdot \frac{\hbar}{i} \sum_{\mu=1}^{3} \sum_{\sigma=3}^{4} (\alpha_\mu)_{2\sigma} \frac{\partial \Psi_\sigma}{\partial x_\mu} - \Psi_3 \right\}, \qquad (14)$$

$$(\alpha_\mu = \alpha, \beta, \gamma, \quad x_\mu = x, y, z \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, 3)$$

Durch eine vollkommen analoge Rechnung, wie die vorher unter I angeführte, können wir leicht die »kleinen« Wellenfunktionen aus (14) für $t = 0$ und in Newtonscher Näherung erhalten. Diese zusammen mit den »grossen« Wellenfunktionen in die Gleichungen (6) eingeführt, ergeben dann

$$j_x = \Bigg\{ 2\,(\overset{*}{A}_3 A_3 + \overset{*}{A}_4 A_4)\,\varepsilon v_x + \frac{\varepsilon\hbar}{2m_0}\, i \sum_{\rho=3}^{4}\sum_{\lambda=3}^{4} \overset{*}{A}_\rho A_\lambda \left[(\beta\alpha)_{\rho\lambda} -\right.$$

$$\left. - (\alpha\beta)_{\rho\lambda}\right] \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\varepsilon\hbar}{2m_0}\, i \sum_{\rho=3}^{4}\sum_{\lambda=3}^{4} \overset{*}{A}_\rho A_\lambda \left[(\alpha\gamma)_{\rho\lambda} - (\gamma\alpha)_{\rho\lambda}\right] \frac{\partial}{\partial z} \Bigg\}\, e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} \tag{15}$$

u. s. w.

Aus diesen Gleichungen kann man auf die Komponenten des magnetischen Momentes der Partikel schliessen, welche den Ausdrücken (9) entsprechen, nur mit dem Unterschied, dass [wegen der Bedingungen (13)] m_0 statt $2m_0$ im Nenner stehen würde. Nach der Normierung würden wir wieder zu den Gleichungen (10) kommen und deswegen auch zu den Beziehungen (11).

Der Ableitung gemäss sind die Relationen (11) selbstverständlich für die ersten drei Diracschen Matrizen gültig, deren Konstruktion der Form (1) oder (12) entspricht[4]). Dass dennoch die Gültigkeit der Relationen (11) etwas breiter ist, als hier abgeleitet wurde, kann man sich dadurch leicht überzeugen, wenn man z. B. die Matrizen von der Form

$$\alpha = \begin{Vmatrix} 0, & a, & 0, & b \\ a, & 0, & -b, & 0 \\ 0, & -b, & 0, & a \\ b, & 0, & a, & 0 \end{Vmatrix} \beta = \begin{Vmatrix} 0, & -ia, & 0, & -ib \\ ia, & 0, & -ib, & 0 \\ 0, & ib, & 0, & -ia \\ ib, & 0, & ia, & 0 \end{Vmatrix} \gamma = \begin{Vmatrix} -a, & 0, & b, & 0 \\ 0, & a, & 0, & b \\ b, & 0, & a, & 0 \\ 0, & b, & 0, & -a \end{Vmatrix} \vartheta = \begin{Vmatrix} -b, & 0, & -a, & 0 \\ 0, & -b, & 0, & a \\ -a, & 0, & b, & 0 \\ 0, & a, & 0, & b \end{Vmatrix} \tag{16}$$

unter der Voraussetzung $a^2 + b^2 = 1$ konstruiert. Aber dass es sicher auch Matrizen gibt, welche wenigstens nicht alle von den sieben Relationen (11) befriedigen, kann man sich leicht überzeugen, wenn man z. B. die Matrizen (wo n eine beliebige positive Zahl bedeutet)

$$\alpha = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix} \beta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \gamma = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \vartheta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{n}+i}{\sqrt{n+1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{n}-i}{\sqrt{n+1}} \\ \frac{\sqrt{n}-i}{\sqrt{n+1}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{n}+i}{\sqrt{n+1}} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{17}$$

in Betracht zieht. Man bemerkt aber sofort, dass die erste (α-Matrix) unter den Matrizen (17) vom Typus (12) ist, während die zwei anderen (β und γ) dem Typus (1) gehören. Die Relationen (11) sind also abgeleitet (auf Grund der Methode des Darwinschen Wellenpaketes) für den Fall, dass die ersten drei Matrizen gleichartig konstruiert sind; ein Blick auf die Matrizen (16) ergibt, dass auch diese gewissermassen gleichartig konstruiert sind.

---

[1]) É Durand, C. R. Acad. Sci. Paris **225**, 280—282, 1947.
[2]) C. Schaefer, Theor. Phys. **III-2**, 468, 1937.
[3]) L. de Broglie, L'Électron magnétique, 173—177, 1934.
[4]) Die Form (1) umfasst (in der ersten drei Matrizen) — soweit mir bekannt ist — fast alle spezielle Matrizen, welche bis jetzt verwendet wurden; vgl. P. A. M. Dirac, Quantenmechanik, 255, 1930; A. Hass, Theor. Phys. **II**, 368, 1930; H. Geiger-K. Scheel, Handb. d. Phys. **24-1**, 301, 1933; L. de Broglie, L'Électron magnétique, 137, 1934; C. Schaefer, Theor. Phys. **III-2**, 451, 1937.

O ODNOSIMA TRIJU DIRACOVIH MATRICA

Dr. V. S. Vrkljan, Zagreb

Sadržaj

Poznato je, da između Diracovih matrica postoje odnosi, koje je postavio sam P. A. Dirac. Međutim moguće je izvesti i druge odnose između Diracovih matrica (E. Durand), a svrha je ove radnje, da se pokažu izvjesni odnosi između prvih triju Diracovih matrica.

Za primjenu metode valnog paketa po Darwinu treba da u Diracovim jednadžbama, i to u derivacijama po koordinatama dolaze samo »velike« valne funkcije ili da se derivacije »malenih« valnih funkcija po koordinatama — ako one ipak dolaze — mogu naknadno u računu ukloniti [isp. na pr. matrice (16)]. Stoga treba da matrice zgodno odaberemo i kao prvi slučaj uzmimo matrice u obliku (1). Pretpostavljamo, da su te matrice Diracove, t. j. da udovoljuju relacijama (2) i (3), gdje pomišljamo, da se simboli α, β i γ mogu ciklički izmijeniti. Napišemo li sada prve dvije Diracove jednadžbe u Newtonovoj približnosti (4) i primijenimo li Darwinove valne pakete za »velike« valne funkcije, onda za »ma-

lene« valne funkcije dobivamo u Newtonovoj približnosti i za $t = 0$ izraze pod (5a), odnosno za konjugirano-kompleksne vrijednosti izraze pod (5b). Napišemo li sada izraze za komponente statističke gustoće električne struje (6), to dobivamo nakon uvrštenja izraza za valne funkcije jednadžbu (7) odnosno nakon primjene Diracovih odnosa (3) jednadžbu (8).

Odavle sad lako zaključimo na komponente magnetskog momenta čestice (9), odakle opet nakon normiranja dolazimo do jednadžbe (10). Kako nas kvadriranje i sumiranje izraza pod (10) mora dovesti do magnetskog momenta čestice, vodi nas to odmah na postojanje relacija (11).

II. Kao drugi primjer možemo odabrati matrice (12), između kojih pretpostavljamo postojanje relacija (13). Onda treća i četvrta Diracova jednadžba daju u Newtonovoj približnosti izraze pod (14), pak postupak, analogan pređašnjemu, vodi nas na jednadžbe (15) kao na izraze za statističku gustoću električne struje. Odavle bismo opet došli do relacija (11).

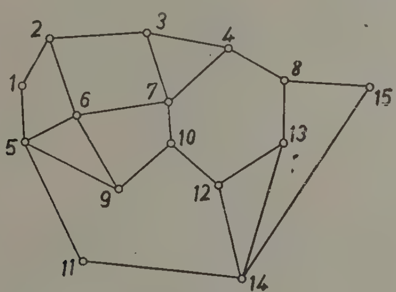
Može se međutim pokazati, da je valjanost relacija (11) šira, nego li je ovdje izvedeno; to razabiremo na osnovi Diracovih matrica (16), ali da sigurno postoje matrice, koje ne zadovoljavaju sve relacije (11), razabiremo na osnovi matrica (17). Dakle su relacije (11) izvedene za slučaj, da su prve tri Diracove matrice istovrsno konstruirane.

(Primljeno 29. X. 1950.)

O STEPENU GIBLJIVOSTI KINEMATIČKIH SKLOPOVA

Ing. Eduard Bosanac, Osijek

Pri analizi prigona, treba prvo riješiti pitanje određenosti gibanja članaka. U tu svrhu potrebno je prvo načiniti nacrt kinematičkog sklopa (shemu prigona). Ograničimo li se na prigone u ravnini, to će nam shema prigona biti neka mreža u ravnini. Ako su pojedini članci prigona vezani međusobno obrtnim zglobovima, onda će čvorište mreže biti slika naših zglobova, a veza među čvorištima u mreži, slika veze zglobova prigona. Kao što se vidi, prvo je potrebno riješiti pitanje, kakovi odnošaji postoje na takovim mrežama u ravnini, bez obzira na kinematička svojstva tih mreža.



Sl. 1

U sl. 1 prikazana je jedna takova mreža u ravnini. U mreži imamo i čvorišta povezanih sa s veza, koje tvore p poligona (očica); u primjeru na sl. 1 je $i = 14$, $s = 21$ i $p = 8$. Samo se po sebi postavlja pitanje, postoji li kakav odnošaj među tim trim veličinama.

Zamislimo, da na mrežu u sl. 1 priključimo još jednu točku (točku 15). Točku možemo priključiti samo jednom vezom, te se u tom slučaju poveća broj točaka u mreži za jedan, a isto tako i broj veza, dok broj poligona ostane nepromijenjen. Ovu istu točku možemo sada povezati na druge točke mreže još daljnim vezama, te svaka daljna veza znači povećanje broja poligona za jedan. Kad

bi imali dvije nove točke vezane na staru mrežu sa po jednom vezom, povećao bi se broj poligona opet za broj daljnjih veza izvedenih među novim i starim točkama. Pri tom se, naravno, dopuštaju samo takove veze, koje ne presijecaju već postojeće veze. Vidimo da je sada u svakom slučaju broj točaka nove mreže $i = i_1 + i_2$, gdje je i_1 broj točaka stare mreže, a i_2 broj dodanih točaka, broj poligona nove mreže $p = p_1 + p_2$ (p_1 = broj poligona stare mreže, p_2 = broj novo nastalih poligona), broj veza nove mreže $s = s_1 + s_2$ (s_1 = broj veza u staroj mreži, s_2 = broj novo izvedenih veza), dakle je

$$s_2 = i_2 + p_2,$$

pa mora biti

$$s = s_1 + i_2 + p_2. \tag{1}$$

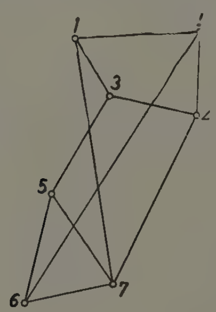
Stara mreža mogla je sadržavati samo tri točke vezane s tri veze ($s_1 = 3$), te bi bilo

$$i = 3 + i_2, \quad s = 3 + s_2 \quad \text{i} \quad p = 1 + p_2,$$

što daje[1]), kad se uvrsti u izraz (1),

$$s = i + p - 1. \tag{2}$$

Ova relacija vrijedi za sve mreže kod kojih se ni jedna veza ne ukrštava s kojom drugom vezom, no mi imamo veoma često posla baš s takovim mrežama, kod kojih se veze ukrštavaju (vidi sl. 2).



Sl. 2

U tom slučaju postupat ćemo na slijedeći način. Izbacit ćemo veze, koje ukrštavaju druge veze (u slici 2 veze 1, 7 i 2, 6) i to tako, da izbacujemo jednu po jednu vezu, dok ne dobijemo mrežu u kojoj se više ni jedna veza ne ukrštava. Kad izbacimo veze imamo mrežu za koju pouzdano vrijedi relacija (2), pa ako označimo sa s_u broj veza, koje ukrštavaju druge, a koje valja izbaciti, sa s broj veza u prvotnoj mreži, koja još sadržava i veze koje ukrštavaju, onda je

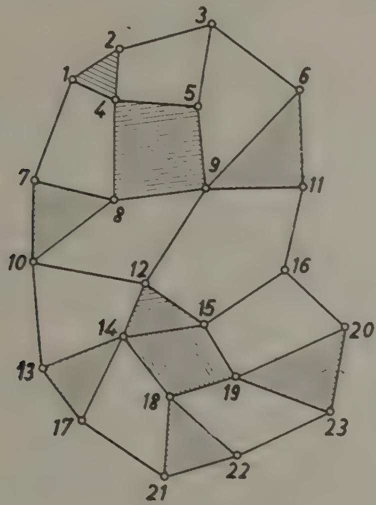
$$s - s_u = i + p - 1. \tag{3}$$

---

[1]) Ta se relacija lako dobiva i iz Eulerove jednadžbe za poliedre.

U mnogo slučajeva moguće je provesti preoblikovanje mreža tako, da uopće ne postoji potreba izbacivanja veza, jer se pri tom pretvore veze, koje ukrštavaju, u veze, koje ne ukrštavaju.

Za neke vrste mreža može se izvesti još jedna relacija. Pretpostavimo, da imamo mřežu kao u sl. 3. Mreža je sastavljena tako, da su pojedine skupine točaka međusobno vezane u kruti poligon rasječen unutarnjim vezama u trokute. Znamo, da su u tom slučaju tri točke vezane s 3 veze, 4 točke s 5 veza, 5 točaka sa 7 veza



Sl. 3

i općenito m točaka s $(2m—3)$ veze. U slici smo ovakove skupove šrafirano istakli. Svaki ovaj skup uzmemo kao jedinice, te vidimo, da imamo općenito u mreži n_2 štapova (veze od samo dvije točke), n_3 trokuta, n_4 četverokuta i općenito n_m m-terokuta. Ukupni broj svih ovih skupova, nazivamo ih članaka, je n, te je

$$n = n_2 + n_3 + \ldots + n_m . \tag{4}$$

Broj veza u takovoj mreži je

$$s = n_2 + 3n_3 + 5n_4 + \ldots + (2m - 3)\, n_m . \tag{5}$$

Saberemo li sada broj veza s i trostruki broj članaka n, to je

$$s + 3n = 2\,(2n_2 + 3n_3 + \ldots + mn_m) . \tag{6}$$

Promatramo li točnije mrežu poput one u sl. 3, vidimo, da ima čvorišta, u kojima se sastaju po dva, tri, četiri članka i t. d. Kad pomnožimo broj štapova s 2 uzeli smo naprosto broj čvorišta na štapovima. Kad napravimo umnožak $3n_3$ uzeli smo broj čvorišta

na trokutnim člancima i t. d. U čvorištu, gdje se sastaju dva članka, uzet je taj čvor jedamput pri jednom članku, a drugi puta pri drugom. U čvorištima, gdje se sastaju tri članka, uzet je čvor još jedamput na trećem članku. Označimo li broj čvorišta sa i, a broj čvorišta u kojima se sastaju dva članka sa z_2, tri članka sa z_3, četiri sa z_4 i općenito čvorište gdje se sastaje f članaka sa z_f, onda je svaki čvor pri izvršenju naloga danog izrazom u zagradi (6) u kome se sastaju dva članka uzet dvaput, svako čvorište u kome se sastaju tri članka triput i t. d., te je prema tome

$$2n_2 + 3n_3 + \ldots + mn_m = 2z_2 + 3z_3 + \ldots + fz_f . \tag{7}$$

Kako je

$$i = z_2 + z_3 + \ldots + z_f , \tag{8}$$

mora biti

$$2n_2 + 3n_3 + \ldots + mn_m = 2i + (z_3 + 2z_4 + \ldots + (f-2)\, z_f) \tag{9}$$

ili skraćeno napisano

$$2n_2 + 3n_3 + \ldots + mn_m = 2i + Z . \tag{10}$$

Odatle izlazi, kad se uvrsti izraz (10) u izraz (6), da je

$$s = 2\,(2i - Z) - 3n . \tag{11}$$

Izraz (11) može se preoblikovati. Uzmimo, da imamo istu mrežu kao u sl. 3, samo sada promatrajmo svaku vezu kao članak. U tom slučaju je $n = s$, pa je

$$2s = 2i + Z' . \tag{12}$$

Kad bi imali poligon 1, 2, 4 (sl. 3) bio bi $Z' = 0$, jer imamo samo čvorove u kojima se sastaju samo po dva članka. Kad bi sad još pridodali poligon 2, 3, 4, 5, postao bi $Z' = 4$, jer se sada u čvorištu 4 sastaju četiri članka, a u čvorištu 5 tri članka. Vidimo, da se pri svakom dodavanju novog poligona Z' uveća za dvostruko, za koliko se poveća broj poligona. Prema tome mora biti

$$Z' = 2\,(p - 1) , \tag{13}$$

gdje je p broj poligona u mreži. Kad bi imali još ukrštenih štapova, lako se uviđa, da bi svaki ukršteni štap povećao Z' također za 2, pa označi li se ukrštene štapove sa s_u mora biti

$$Z' = 2\,(p + s_u - 1) . \tag{14}$$

Uvrstimo li izraz (14) u izraz (12), dobivamo opet izraz (3).

Uzmimo sada, da imamo mreže kao na sl. 4. Mreža se sastoji od štapova i poligonalnih ploča. U mreži postoje samo jednostruki zglobovi, t. j. samo zglobovi u kojima se sastaju po dva članka. Svaki pločasti članak može se rastaviti u krute trokute (istaknuto šrafirano u slici). Vidi se, da mreža ima p_k krutih trokuta (dijelovi pločastih članaka) i p_s očica (nešrafiranih poligona). Pustimo sada da trokut A degenerira u štap; pri tom se smanji broj trokuta p_k za 1, a broj očica p_s ostaje isti; osim toga se jedan zglob pretvara u dvostruki, jer se sada u njem stječe 3 članka (na pr. članak A, 1 i 3), dakle se Z poveća za 1.

Promotrimo sada mrežu u kojoj ima niz višestrukih zglobova. ali nema nijednog pločastog članka. Za tu mrežu vrijedi

$$Z = 2\,(p_p - 1)\,. \tag{13}$$

Iz mreže se može ukloniti višestruki zglob. tako da se kod dvostrukog zgloba jedan susjedni štap pretvori u trokut. kod trostrukog zgloba u četverokut ili da se dva štapa pretvore u trokute i t. d. Dakle u svakom slučaju za koliko se smanji Z za toliko se poveća p_k, a p_p ostane nepromjenljiv. Dakle vrijedi

$$Z + p_k = 2\,(p_p - 1)\,. \tag{15}$$

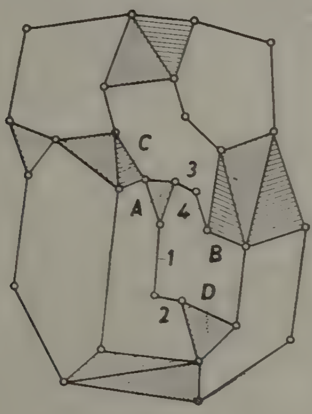
Za $Z = 0$ je

$$p_k = 2\,(p_p - 1)\,. \tag{16}$$

Sada možemo izraz (3) preoblikovati. ako načinimo da je $p = p_k + p_p$, te se dobiva

$$s = i - Z + 3p_p + s_n - 3\,. \tag{17}$$

U nauci o prigonima ne zanimaju nas kakve god mreže. nego samo one s određenošću gibanja. Stanoviti broj zglobova i valjat će povećati nekim određenim brojem veza s, da se dobije prigon s određenošću gibanja. Umetne li se u takav prigon još jedna



Sl. 4

veza. pretvorit će se u krut sklop. a oduzme li se jedna veza. ne će više postojati određenost gibanja. Koliko treba veza izvesti. da prigon bude krut. nije teško ustanoviti. Uzmimo. da imamo mrežu za koju znamo da je kruta. pa ustanovimo s koliko veza moramo vezati jednu daljnu točku na mrežu. pa da nova dobivena mreža bude kruta. Evidentno je. da će trebati izvesti najmanje dvije

nove veze za svaku novo priključenu točku. Označimo li sa i_d broj dodanih točaka, sa s_d broj novo izvedenih veza, sa s ukupni broj veza nove nastale mreže i sa s_s broj veza stare mreže, onda je

$$s = s_s + s_d = s_s + 2i_d \,. \tag{18}$$

Uzmimo sada, da je naša početna mreža imala samo dvije točke povezane jednom vezom, onda bi ukupni broj točaka novo nastale mreže bio $i = n + 1$, $s_s = 1$, pa je

$$s = 2i - 3 \,. \tag{19}$$

Kad bi toj mreži oduzeli jednu vezu, dobili bi prigon s određenošću gibanja, a kad bi oduzeli dvije veze ne bi više postojala ni određenost gibanja. Prema tome se može pisati, da je

$$s = 2i - k \,, \tag{20}$$

gdje je $k = 3$ za krutu mrežu, $k = 4$ za prigon s određenošću gibanja i t. d. Izraz (19) nam daje najnužniji broj veza, da bi mreža bila kruta, ali taj uvjet nije dovoljan, da se ustanovi, da li je neka mreža kruta ili nije i to zato, što se taj isti broj veza može između i točaka izvesti tako, da se neke točke vežu međusobno s više veza, pa nisu kruto vezane. Dakle, da bi neka mreža bila kruta ili s određenošću gibanja, mora imati najmanje toliko veza koliko izlazi iz izraza (20), ali osim toga za svaki povoljno izabrani skup točaka mreže napose mora također biti zadovoljen uvjet iz izraza (20) s ograničenjem, da ni za jedan sklop ne smije k biti manji od 3, ali može za pojedine skupove biti veći od 3. To znači, da u mreži u kojoj smo ustanovili, da nema veći broj veza, nego što je neophodno potrebno, mora raspored veza biti takav, da ni jedan povoljno odabrani skup točaka nije međusobno vezan suvišnim vezama. Ako ustanovimo, da u mreži ima više veza, nego što bi odgovaralo po uvjetu iz izraza (19), to ne znači, da je mreža kruta, nego takova mreža može biti još uvijek i bez određenosti gibanja, ako se u mreži nalaze skupovi u kojima ima suvišnih veza. Mreže sazdane po načinu mreže prikazane u sl. 3 udovoljavaju već uvjetu, da nema u njima suvišnih veza. Kod neposredne primjene uvjetâ za gibljivost mreže, danih izrazom (20), može se u praksi, redovito, lako ustanoviti, da li u pojedinim skupovima točaka ima ili nema suvišnih veza. Postupa se na taj način, da se ustanove skupovi kruto vezanih točaka, pa se pri brojanju veza uzme, da je svaki ovakav skup vezan samo najnužnijim brojem veza. Na pr. ako se ima jedan od 4 točke, vezan sa 6 veza, onda je jedna veza suvišna, te za taj skup izlazi da je $k = 2$; jedna veza se tu može ukloniti, a da veza ostane kruta, pa se prema tome vidi, da je najnužniji broj veza $s = 5$ i pri brojanju za prosuđivanje gibljivosti cijele mreže uzimamo kao da postoji samo 5 veza. Tada će nam obračun po izravnom uvjetu (20) dati ispravan rezultat.

Osim ovog izravnog kriterija za ustanovljenje gibljivosti mreže (shema prigona, a time i samog prigona), može se lako izvesti i niz izvedenih uvjeta. Iz izraza (2) i (3) odnosno (11), (12) i (17) može se izlučiti broj veza s ili broj točaka (zglobova) i, ako se za te veličine uvrste vrijednosti iz (20), pa se za k (stupanj gibljivosti) dobije

$$k = i - (p + s_u - 1) \tag{21a}$$

$$k = s - 2(p + s_u - 1) \tag{21b}$$

$$k = 3n - 2(i + Z) \tag{21c}$$

$$k = (3n - s)/2 - Z \tag{21d}$$

$$k = i - Z'/2 \tag{21e}$$

$$k = s - Z' \tag{21f}$$

$$k = i + Z\,3pp + 3 - s_u\,. \tag{21g}$$

Svi ovi izvedeni kriteriji imaju jednaki doseg, samo treba imati na umu, da svi daju ispravne rezultate samo dotle, dok ne uračunavamo suvišne veze. Kako uvjeti po (21c) i (21d) imaju za osnovicu mrežu, koja je tako sazdana, da u njoj nema suvišnih veza, to je jasno, da se ne treba posebno uvjeravati, da ni jedan skup točaka nije vezan suvišnim vezama.

Dosada su u literaturi bili poznati kriteriji za gibljivost mreža odnosno prigona Wittenbauerovi i Grüblerovi. Iz naših kriterija (21 a do f) mogu se jedan i drugi lako izvesti, te je na pr., ako je $s_u = 0$ (mreža bez ukrštenih štapova)

$$k = s - 2p + 2, \qquad (21\,c'). \tag{21 b'}$$

a to je Wittenbauerov kriterij (Graphische Dynamik str. 229). Označi li se u (21 c)

$$i + Z = g$$

i uzme li se $k = 4$, dobiva se Grüblerov kriterij za određenost gibanja prigona

$$2g = 3n + 4 = 0\,, \tag{21c}$$

(Primljeno 3. I. 1951.)

ÜBER DEN BEWEGLICHKEITSGRAD KINEMATISCHER VERBINDUNGEN

Von Eduard Bosanac

Zusammenfassung

Es wird zunächst die der Eulerschen Polyederrelation entsprechende Gl. (2) hergeleitet, wo s die Anzahl der Verbindungen, p die Anzahl der Polygone und i die Anzahl der Knotenpunkte bedeuten. Sind s_u Verbindungen vorhanden, die entfernt werden müssen um Kreuzungen zu vermeiden, so ist die Gl. (3) gültig. Bedeutet k den Beweglichkeitsgrad des Gelenknetzes, so wird nun gezeigt, dass die Kriterien (21a) bis (21g) gelten. Unter Z ist dabei der Ausdruck

$$Z = z_3 + 2x_4 + 3x_5 + \ldots + (f-2)z_f$$

zu verstehen, wo z_3, z_4 usw. die Anzahlen der Knotenpunkte sind, in denen 3, 4 usw. in sich starre Teile zusammentreffen, während $Z' = 2\,(p-1)$ gesetzt ist. Alle diese Kriterien haben dieselbe Tragweite, nur muss beachtet werden, dass überflüssige Verbindungen stets wegzulassen sind. Das Wittenbauersche Kriterium (21b') und das Grüblersche Kriterium (21c') (wobei $k=4$ und $g=i+Z$ ist) sind Spezialfälle dieser Beziehungen.

INTERNACIONALNI KONGRES MATEMATIČARA U CAMBRIDGE-U (BOSTON) 30. VIII.—6. IX. 1950. OBRAZOVANJE INTERNACIONALNE UNIJE MATEMATIČARA

1. **Kongres u Oslu. Kongres u Cambridge-u (Boston).** Na internacionalnom matematičkom kongresu, što je održan 1936. u Oslu, odlučeno je, da se naredni kongres održi 1940. u S. A. D.[1]) No, zbog ratnih događaja kongres je bio odgođen, a održan je tek 1950., tako da je razmak između ta dva kongresa iznosio punih 14 godina. U međuvremenu, nauka uopće, a matematička napose, znatno je napredovala i to kako po rezultatima i sredstvima tako i po broju ljudi, koji se njome bave. Tako je na pr. napredak fizike omogućio nov način »ispisivanja« brojaka i brojeva primjenom elektronskih pulseva, te je pošlo za rukom ostvariti (i to na veleban način) planove o nekojim matematičkim strojevima od jedan vijek ranije, i stvoriti elektronske računske strojeve t. zv. elektronske mozgove. Drugi bitan napredak u proteklih 14 godina učinjen je u izučavanju matematičkog kontinuuma, a treći u sistematskoj obradi i generalizaciji raznih nosilaca matematičkih veza (nije važno da li se ti nosioci zovu brojevi, funkcije, funkcionale, točke, pokreti, naboji, skupovi i sl.).

Kongres je održan u najstarijem američkom sveučilištu, Harvard University (osnovano 1636. g.). No, osim toga glavnog domaćina i druge visokoškolske ustanove države Massachusetts, u kojoj je Boston i njegovo predgrađe Cambridge, imale su ulogu domaćina; treba znati da u kulturnom pogledu po broju historijskih i kulturnih spomenika i tradiciji taj glavni dio »Nove Engleske« odskače od skoro svakog drugog kraja u S. A. D. Američko matematičko društvo je preuzelo svu organizaciju kongresa. UNESCO je dao znatnu pomoć od 10.000 dolara; pomoć su dali također Carnegie Corporation, Rockfeller Foundation, visoke škole Velikog Bostona i t. d.

2. **Broj delegata. Delegati Jugoslavije.** Na Kongresu je bilo oko 2300 posjetnika, dakle daleko više nego na ikojem dosadašnjem matematičkom kongresu; izvan Sjeverne Amerike došlo je oko 300 članova; a oko 200 ljudi ma da prijavljeno, nije prispjelo na Kongres. Sovjetski Savez a ni ostale zemlje istočne Evrope nisu nažalost poslali svoje predstavnike, a baš je na matematičkom kongresu imala svaka strana da mnogo kaže i mnogo čuje. Od evropskih delegacija najbrojnija je bila francuska (tridesetak). Jugoslaviju su predstavljali: Dr. J. Karamata (Beograd), Dr. Đ. Kurepa (Zagreb), Dr. J. Vidav (Ljubljana), te Ing. D. Ivanović (Beograd), koji je usput, doputovavši u S. A. D. na specijalizaciju iz atomne fizike, došao i na Kongres. Svaki je od pomenutih prvih triju predstavnika održao po jedno predavanje. Osim mene sva su trojica učesnika doputovala u U. S. A. avionom. Ja sam iz Zagreba otputovao 2. VIII. 1950., sutradan se ukrcao na naš motorni brod »Srbija«, iz Rijeke smo krenuli 4. VIII. ujutro, a iskrcali se 29. VIII. u Gloucesteru kod Filadelfije. Putovanje je bilo vrlo lijepo i poučno; zaustavljali smo se na nekoliko afričkih i evropskih mjesta. Od Jugoslavena na kongresu je bio i Dr. W. Feller, rođen Zagrepčanin, sada američki državljanin i jedan od vrlo uglednih američkih matematičara (profesor je u Princetonu).

3. **Otvaranje Kongresa.** Odmah poslije ručka 30. VIII. kongresisti su se sakupili u Memorial Hall Sanders Theatre, na svečano otvorenje. Kongres je kratkom besjedom na engleskom i francuskom jeziku otvorio Garrett Birkhoff (Harvard), predsjednik Organizacionog Komiteta. Pošto je tada O. Veblen izabran za predsjednika Kongresa i

[1]) Prvi internacionalni kongres matematičara održan je 1897. u Zürichu.

održao govor, H. Bohr je u ime Komiteta za nagrađivanje podnio vrlo iscrpan izvještaj o nagrađivanju L. Schwartza (Nancy)[1]) i A. Selberga (Norvežanina, sada u Princetonu). Govorio je i Hadamard, jedini prisutni od tri počasna predsjednika Kongresa. Najzad je tajnik Kongresa i tajnik Am. mat. društva J. R. Kline podnio izvještaj o broju učesnika. Zatim smo se razišli i uputili se u razne predavaonice na specijalna predavanja.

4. **Metode rada na Kongresu.** Zvanični rad Kongresa sastojao se u saopćenjima (predavanja od 10—15 minuta), referatima, te grupnim izvještajima. Referate (stated adresses) držali su oni stručnjaci, koje je pozvao Org. Komitet; osim toga bilo je referata, što su držani na poziv pročelnika pojedine sekcije. Svaki »grupni izvještaj« (conference) sastojao se od po nekoliko »zasjedanja«; i pojedini referat mogao je biti predmet jednog »zasjedanja«. Na tim zasjedanjima bi jedan ili više članova odabrane grupe dao u ime grupe izvještaj, a onda bi se pristupilo diskusiji. Do diskusija je, međutim, dolazilo relativno rijetko kada. Referati i grupni izvještaji pokazali su se kao vrlo prikladan način, kako da stručnjak dobije pogled na širi krug pitanja, koja graniče sa njegovim vlastitim istraživanjima; danas, kad se nauka razvija takvim tempom, ti su referati i izvještaji od osobite važnosti.

Naravno, da je nepovratno prošlo vrijeme, kad na tako velikom Kongresu čovjek može da prati rad čitavog Kongresa; zato se rad i odvija po sekcijama. No, sekcije nisu odijeljene kineskim zidom. Svako može da ide na ona predavanja, za koja ima najjači interes. Štampani programi sa raznim podacima bili su takovi, da je čovjek uvijek mogao da zna šta se u pojedinom času radi i da prema tome odredi na koju će stranu, pa se zato moglo prelaziti sa pojedinog predavanja u pojedinoj sekciji na pojedina predavanja koje druge sekcije. Činjenica, da su sve predavaonice bile ili u samom Harvardskom parku ili u neposrednoj blizini, pogotovo je omogućavala učesnicima, da mogu prelaziti sa jednog predavanja na drugo.

5. **Predavanja Jugoslavena.** Naši delegati predavali su ovim redom: 1) Dr. Karamata, 31. VIII., O jednoj vrsti pravilne neprekidnosti sa primjenom na Fourierove redove; 2) Dr. Đ. Kurepa, 2. IX., O djelimično uređenim skupovima (generalizacija De Morganova obrasca, te operacija Suslina i Aleksandrova. Predsjedavajući A. Denjoy odobrio mi je više vremena, no što je na programu bilo napisano); 3) Dr. I. Vidav, 6. IX., O Kleinovim teoremima kod linearnih diferencijalnih jednadžbi; 4) Dr. W. Feller (45 minuta), 6. IX., O matematičkoj teoriji difuznih procesa; dan prije toga, 5. IX., imao je on zajedničko saopćenje sa G. E. Forsytheom, O novim transformacijama matrica da se dobiju karakteristični vektori.

6. **Sekcije Kongresa.** Rad Kongresa odvijao se (uglavnom paralelno) u ovih 7 sekcija Kongresa: Prva Sekcija: Algebra i teorija brojeva, sa 58 saopćenja i 3 referata na poziv pročelnika Sekcije H. A. Rademachera (Univ. of Pennsylvania); Druga Sekcija: Analiza sa 126 saopćenja, te 3 referata na poziv pročelnika G. C. Evansa (Univ. of California); Treća Sekcija: Geometrija i topologija, sa 56 saopćenja, te 2 referata na poziv pročelnika S. Eilenberga (Columbia University); Četvrta Sekcija: Vjerojatnost, statistika, aktuarska matematika i ekonomika, 27 saopćenja, te 3 referata na poziv pročelnika Sekcije J. L. Dooba (Univ. of Illinois); Peta Sekcija: Matematička fizika i primjenjena matematika, sa 74 saopćenja, te 3 referata na poziv pročelnika Sekcije R. Courant-a

---

[1]) Napominjem, da je o svojim nagrađenim radovima iz teorije distribucija prof. Schwartz nedavno održao predavanja u Beogradu, Zagrebu i Ljubljani.

(N. York University); Šesta Sekcija: Logika i filozofija, sa 16 saopćenja, te 3 referata na poziv pročelnika Sekcije A. Tarskog (University of California); Sedma Sekcija: Historija i pedagogija (metodika) sa 15 saopćenja, te 1 referatom na poziv pročelnika C. V. Newsoma (Univ. of the State of N. York).

7. **Referati.** Na poziv Organizacionog Komiteta držani su ovi referati (po alfabetskom redu predavača):

1. Albert A. A., Stepenasto asocijativne algebre;
2. Beurling, O nul-skupovima u harmoničnoj analizi i teoriji funkcija,
3. Bochner S., Laplaceov operator na mnogostrukostima;
4. Cartan H., O analitičkim funkcijama kompleksnih promjenljivih;
5. Chern S. S., Diferencijabilna geometrija u snopovima;
6. Davenport H., Nedavni radovi o geometriji brojeva;
7. Gödel K., Rotirajući svemiri u općoj teoriji relativiteta;
8. Hodge W. V. D., Topološke invarijante algebarskih mnogostrukosti;
9. Hopf H., N-dimenzionalne kugle i projektivni prostori u topologiji;
10. Hurewicz W., Homologija i homotopija;
11. Kakutani S., Ergodička teorija;
12. Morse M., Najnoviji uspjesi u računu varijacije u velikom;
13. Neumann J., Sudari i njihova matematička obrada;
14. Ritt J. F., Diferencijalne grupe;
15. Rome A., Izračunavanje jednog pomračenja Sunca prema Theonu Aleksandrijskom;
16. Schwartz L., Distribucije i glavna svojstva;
17. Wald A., Osnovne ideje opće teorije o statističkom rasuđivanju;
18. Weil A., Teorija brojeva i algebarska geometrija;
19. Whitney H., R-dimenzionalna integracija u n-dimenzionalnom prostoru;
20. Wiener N., Obuhvatan pogled na teoriju predskazivanja;
21. Wilder R. L., Kulturna osnova matematike;
22. Zariski O., Osnovne ideje apstraktne algebarske geometrije.

W. Feller je posebno održao referat od 45 minuta »O matematičkoj teoriji difuznih procesa«. Grupni izvještaji (»konferencije«) odnosili su se na 1. Algebru (4 zasjedanja), 2. Analizu (4 zasjedanja od kojih je jedno bilo zajedno s topologijom), 3. Primjenjenu matematiku (sa 3 zasjedanja), te 4. Topologiju (sa 4 zasjedanja).

8. **Neslužben rad.** Nezavisno od službenih predavanja tekli su međusobni ili grupni razgovori, pitanja, razjašnjenja i t. d. Ja sam specijalno htio da vrijeme čim bolje iskoristim. Dobra fizička kondicija dobivena putovanjem brodom i sunčanjem, te znanje raznih jezika bili su mi pritom od znatne koristi.

9. **Društveni dio.** Društveni dio kongresa bio je razrađen do svih pojedinosti. Sastojao se u posjećivanju ustanova, koncerata, razgledanja grada i t. d. Tako na pr. svaki dan od 9—17 sati moglo se razgledati glasovitu matematičku mašinu Harvardskog univerziteta i laboratorij za računanje u kojem je taj stroj smješten. Bilo je organizirano razgledanje Harvarda kao i MIT (Massachusetts Institute of Technology) sa svojim računskim strojevima i raznim fizičkim uređajima. Umjetnički program bio je na visini (kvartet, recital, dva solo-koncerta). Naravno, i društveni dio Kongresa odvijao se često paralelno, pa se ponekad dosta teško bilo odlučiti na koju priredbu čovjek da ide.

10. **Banket.** Predzadnjeg dana Kongresa, 5. IX. uveče pod vedrim nebom odnosno pod šatorima bio je banket sa mnoštvom učesnika (jedan od mojih susjeda bijaše Pupinov nasljednik Koopman, sa Columbia University). Predsjednik Kongresa O. Veblen odlikovao se u svojem govoru raznim vrsnim komentarima. Glavni je govornik bio Dr. D. Bronk, predsjednik National Academy of Sciences; kao fizičar zagovarao je

saradnju sa matematikom i biologijom, a govorio je o slobodi pojedinca i zajednice. Još su govorili gradonačelnik Cambridge-a, pa predstavnici Harvarda, MIT-a i t. d. Prof. W. V. Hodge iz matičnog Cambridge-a (Engleska) zahvalio se u ime stranih delegata na gostoprimstvu.

11. **Posljednji plenarni sastanak. Internacionalna unija matematičara.** Zadnjeg dana, 6. IX. prije podne bio je plenarni sastanak u Sanders Theatre; na njemu je M. H. Stone (Chicago) podnio izvještaj o vijećanjima što su bila 27., 28. i 29. VIII. u New Yorku; cilj je tih vijećanja u New Yorku bio, da se obrazuje Internacionalna matematička unija. Stone je izvjestio, da su pravila za istu primljena i da će stupiti na snagu čim ih potpiše desetak jačih naučnih matematičkih udruženja. Tada će Unija biti proglašena i generalna skupština pravovremeno sazvana. Na vijećanjima u New Yorku Jugoslaviju su zastupali isti ljudi, koji su je zastupali na Kongresu; jedino ja nisam mogao na vrijeme stići, jer je naš brod, zadržavajući se i tovareći usput više nego što se mislilo, prispio u S. A. D. osam dana iza predviđenog roka.

12. **Slijedeći Kongres.** Na plenarnom sastanku 6. IX. prihvaćen je poziv holandeskog predstavnika van der Corputa da se slijedeći matematički kongres održi 1954. u Holandiji.

13. **Oproštajno veče.** Uveče 6. IX.. bilo je oproštajno veče, logički pendant primanja sa prvog dana Kongresa. Time je službeni dio Kongresa završen.

Već sutradan je harvardski park skoro opustio: mjesto mnoštva kongresista sa karakterističnim značkama na kaputu, na kojima je bilo čitljivo ispisano ime i prezime učesnika sa naznakom grada i zemlje koju zastupa, mogao se sresti samo još po koji: učesnici su se razišli. Ja sam u Harvardu ostao do 14. X., a onda sam preko Niagarinih Slapova prešao u Kanadu, obišao nekoliko univerziteta, vratio se u S. A. D. kod Detroita, produžio do Pacifika (San Francisco, Los Angeles, San Diego, pa natrag do Atlantika razgledavajući kulturne i naučne tekovine (napose »elektronske mozgove«) držeći stručna predavanja i t. d. U domovinu sam se vratio koncem prvog mjeseca 1951. g.

14. **Djelimični kongresi (simposia).** U vezi sa glavnim Kongresom bili su i djelimični kongresi (simposia) o pojedinim matematičkim granama kao:

28.—29. VIII. O hidromehanici na Harvard University;
29. VIII. O diferencijalnoj geometriji na Bostonskom univerzitetu;
7.—8. IX. O algebarskoj geometriji na Harvardu;
7.—9. IX. O računskim strojevima u Washingtonu;
8.—9. IX. O diferencijalnim jednadžbama na Maryland University;
8.—9. IX. O plastičnosti na Brown University.

Mene je svakako najviše zanimalo pitanje o računskim strojevima Ipak, tada nisam išao u Washington, jer sam znao da će se Kongres o sličnim stvarima održavati početkom prvog mjeseca 1951. u Parizu, na kojem ću sudjelovati pri povratku kući (na tom sam važnom Kongresu nazvan »Matematički strojevi i ljudska misao«, učestvovao; o njemu će još biti riječi u ovom broju Glasnika.

15. **Zaključak.** Kongres u Harvardu najveći je dosad matematički Kongres. Na njemu je bilo oko 2300 učesnika od čega oko 300 izvan S. A. D. i Kanade. Uspjeh Kongresa je van sumnje; na njemu su bile zastupane i teorije i primjene matematike. Uspjeh Kongresa bio bi još veći, da su na njemu učestvovali i matematičari iz istočnih zemalja Evrope.

Dr. Đ. Kurepa

INTERNACIONALNI KOLOKVIJ: MATEMATIČKI STROJEVI I LJUDSKA MISAO

Pariz 8.—13. I. 1951.

1. Jedna od bitnih tekovina čovječanstva je izum raznih strojeva uopće, a matematičkih napose. Specijalno, primjenom elektronike pošlo je nedavno čovjeku za rukom da ostvari basnoslovno brzo brojanje, a time i basnoslovno brzo računanje. Otkad je pred svoja tri vijeka 19-godišnji Pascal prvi pronašao računski stroj na kotačiće, stvar je sa računanjem vrlo napredovala. Prošlog stoljeća Englez Babbage je izradio smione nacrte o novim strojevima, no trebalo je da protekne oko 100 godina, pa da dođe i do pravog njihovog ostvarenja služeći se rezultatima elektronike. Tako su za vrijeme posljednjeg rata odn. neposredno po njegovu završetku nastali novi matematički strojevi nazvani »elektronski« ili »čelični mozgovi«. Njihova je primjena vanredno mnogostruka i u praksi i u teoriji. Problematika strojeva napredovaše vrlo brzo — znak visokog stupnja današnje nauke. Odmah se uočilo da između rada i sastava novih računskih strojeva s jedne strane, te rada i sastava mozga i živčevlja s druge strane ima dalekosežnih analogija. Shvaćajući kakvu važnost ima matematika za državu Francuzi su poput toliko drugih država osnovali nacionalni matematički institut za računanja, a po izumiocu prvog matematičkog stroja prozvali ga Institut Blaise Pascal. Taj institut spada pod Nacionalni centar za naučna istraživanja (Centre National de Recherches Scientifiques, skraćeno: C. N. R. S.).

2. I prije je bilo, što užih, što širih vijećanja, simposija, o novim matematičkim strojevima. Na pr. 7.—10. I. 1947. na Harvard University[1]); neposredno poslije Internacionalnog kongresa matematičara u Cambridge-u USA (30. VIII.—6. IX. 1950.) održan je 8. i 9. IX. 1950. u Washingtonu simposium o računskim strojevima. Tada se već znalo, da će se početkom ove godine održati u Parizu veliko vijećanje o matematičkim strojevima, kao i o pitanjima fiziološkim, koja su s tim u vezi. Tom sam se sastanku veselio, pogotovo što sam znao, da ću do njegova održavanja imati prilike da vidim razna ostvarenja novih strojeva. U Cambridge-u (USA) sam još za vrijeme Kongresa pogledao glasovitu računsku mašinu IBM MARK I — prvo Aikenovo djelo (sada je MARK IV u izgradnji), inače u službi mornarice; pa sam vidio strojeve u MIT (Tehnika u Cambridge-u). U Los Angelesu sam prisustvovao isprobavanju SWAC-a (National Bureau of Standards Western Automatic Computer; SEAC — Standards Eastern Automatic Computer nalazi se u Washingtonu). U New Yorku razgledao sam veliko elektronsko računalo IMB (Selective Sequence Electronic calculator); u Princetonu se elektronsko računalo dogotavlja, a služit će za teoretska istraživanja.

Interesirala me također Williamsova realizacija stroja u Manchesteru (Engleska), pa sam vidio da kane prijeći i na serijsku proizvodnju njihovu, na novim vrlo pogodnim principima.

3. Iz USA sam zatražio, i od Ministarstva za nauku i kulturu NRH dobio potreban dopust da sudjelujem na Kolokviju u Parizu; bio sam određen da sudjelujem kao delegat NR Hrvatske. Nakon velikih poteškoća najzad sam dobio francusku ulaznu vizu i to jedva jedan dan prije otvaranja Kongresa. Kolokviju je prisustvovalo preko 300 ljudi vrlo raznih struka: matematičari, fizičari, inženjeri, fiziolozi, psiholozi, te ljudi slobodnih zvanja i t. d.; osobito treba istaknuti da je bilo

---

[1]) cf. Proceedings of a Symposium on Large-Scale Digital Calculating Machinery, Cambridge, Mass, 1948, 30+302. Vol. 16. The Annals of Computation Laboratory of Harvard University.

dosta vojnih lica, jer je vojska vrlo zainteresirana tim novim tekovinama matematičke nauke. Imena od bar nekoliko učesnika vidjet će se iz daljega izlaganja.

4. Internacionalni kolokvij o računskim strojevima i ljudskoj misli održan je u Parizu od 8.—13. I. 1951. Bio je podijeljen u tri sekcije:

Prva sekcija: Nedavni uspjesi u tehnici velikih računskih strojeva, radila je 7. i 8. I.; predsjedavao joj je nobelovac L. de Broglie, tvorac valne mehanike.

Druga sekcija: Problemi matematike i primijenjenih nauka u vezi sa velikim računskim strojevima, radila je 10. i 11. I.; predsjedavao je Caquot.

Treća sekcija: Veliki računski strojevi, logika i fiziologija nervnog sistema, radila je 12. i 13. I.; predsjedavao je fiziolog Lapicque odnosno psiholog Piéron.

Sam Kolokvij počeo je radom u ponedjeljak 8. I. 1951. u 9 sati u Centre National de Documentation Pédagogique, 29, Rue d'Ulm, u neposrednoj blizini glasovite École Normale Supérieure, te čitavog skupa naučnih instituta smještenih na jednom susjednom bloku. U odsutnosti predsjednika C. N. R. S.-a Kongres je otvorio Pérès, predsjednik Pascalova instituta; pozdravljajući prisutne dao je kraći izvještaj o aktivnosti Pascalova instituta sa svoja dva ogranka: Laboratoire (u kojem je Couffignal) i Laboratoire de calcul analogique et éléctrique. Poslije toga radom je započela prva sekcija. Pročelnik L. Broglie održao je kraću besjedu odajući priznanje Bl. Pascalu za kojega reče da je svoju mašinu našao u vezi sa problematikom poreza. Zatim je poznati H. Aitken (Harvard) održao detaljan prikaz nove mašine marke IV, harvardske mašine, koja se sada gradi; brojni diapozitivi i sa svoje strane pridonijeli su zanimljivosti predavanja.

A. D. Booth (Engleska), P. L. Couffignal (Francuska), E. Stiefel (Švicarska), F. C. Williams (Engleska), E. J. Petherick, u ime zrakoplovstva, (Engleska), F. M. Colebrook (Engleska), P. Germain (Belgija), W. Cannon (USA), Del Valle (Španija), S. Ekelöf (Švedska), F. Raymond (Francuska), govorahu o strojevima, što su ih ostvarili ili što ih grade u svojim zemljama. Vrlo je poučan primjer Švedske koja se sa novim strojevima upoznala tek oko 1946., odmah imenovala komisiju, organizirala nacionalni institut za račun i započela graditi elektronsku mašinu Williamsova tipa; dosad su gotove mašine tipa Bush, a u Göteborgu grade jedan stroj za izračunavanje integrala sa jezgrom u vezi sa linearnim i nelinearnim integralnim jednadžbama, druga je opet mašina za Fourierove transformacije; projektira se jedan računski stroj za automatsko crtanje elektronskih staza u električnom i magnetskom polju i t. d.

Francuz Couffignal prikazao je demonstracijama ono, što je dosad napravljeno od francuskog projekta »univerzalne računske mašine«, koja će moći u isto vrijeme vršiti više računskih operacija i kojoj će se domet povećati dodavanjem sve novih i novih dijelova. Prema glomaznosti ostalih realizacija, ta njegova mašina bit će manje veličine, a tim čvršća i otpornija. Na to je on naročito ukazivao.

5. Rad u drugoj sekciji ticao se više samog postupka pravljenja programa za mašine i računanja. Van den Duhgen (Belgija) govorio je o numeričkoj integraciji valne jednadžbe, a M. Picone (Italija) o numeričkoj integraciji sistema parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i t. d. U diskusiji se mnogo govorilo o terminologiji[1]). Govorilo se o metodici

---

[1]) Unesco ima jednu Komisiju za terminologiju, pa je prihvaćeno, da bi trebalo da pojedine zemlje odrede svog delegata za pitanja terminologije i o tome pismeno obavijeste Sekretarijat u Institutu Blaise Pascal, koji bi se onda stavio u vezu sa odgovarajućom komisijom Unesca.

nastave matematike, a napose kako te nove tekovine matematike imaju da prodru i u nastavu za matematičare, fizičare i inženjere.

Izvan programa održao je 11. I. Aiken predavanje o svojim novim istraživanjima o teoriji elektronskih cijevi i logici (o tome se sada u Harvardu štampa velika knjiga); njegove switch-functions su t. zv. karakteristične funkcije iz teorije skupova.

6. Izvanredan interes je vladao za rad treće sekcije, koja je obrađivala analogije između strojeva i mozga. Predsjedavao joj je fiziolog Lapicque, koji je pred desetak godina napisao djelo Machine nerveuse — »naslov smion« kako reče, no poslije opravdan. Najprije je Španjolac Quevedo izložio nekoje robote i automate (na pr. igrača šaha) svojeg pok. oca. Grey Walther (Engleska) je govorio o mehaničkim realizacijama modela cerebralne strukture; pokazao je, kako se jednostavnim električkim sredstvima mogu kod robota ostvariti izvjesna fiziološka svojstva kao: osjetljivost na svjetlo, dodir, traženje optimuma, izbjegavanje Buridanove neodlučnosti i t. d. Matematičar N. Wiener (USA — pisac kibernetike, nove »nauke o kontroli i vezama kod životinja, strojeva i ljudskih zajednica«, izložio je ukratko kako mašina ima osjećaj za oblik (primjene prostora sa 4 dimenzije u teoriji kompl. funkcija sa 2 kompleksne varijable). Histolog nerava Pei No (USA) izložio je mehanizam rada neurona. Ljekar H. Gastaud (Francuska) uporeduje rad strojeva i nerava. A. M. Uttley (Engleska) ispituje mogućnosti logičkih operacija sa strojevima. W. R. Ashby (Engleska) prikazuje svoj homeostat: jednostavna vještačka realizacija prilagođivanja okolini. Liječnik P. Cauchard (Francuska) iznese, kako je djelatnost živčevlja upravljana iz jednog središta i iznesi u tom pogledu analogije između nervnog sistema i strojeva. Couffignal (Francuska) je naročito insistirao na analogijama između strojeva i mozga. Fiziolog Mc Culloch (USA) izložio je svoje i svojih suradnika rezultate o usporedbi računskih strojeva i mozga: središnji nervni sistem shvataju oni kao releje napravljene od neurona; brojnim crtežima prikazao je oblike ovih, te nastojao objasniti mehanizam kako nervni sistem radi. Nabraja razlike, te sličnosti između živčevlja i elektronskih računskih strojeva.

Diskusija je bila vrlo živa, a na momente i žučna. No svojim odlučnim stavom stari Lapicque ju je ipak održavao u granicama dopustivoga. Pred završetak zasjedanja i sâm sam sudjelovao u diskusiji. Razlikovanje između t. zv. digitalnih (aritmetičkih), te analogičkih strojeva dolazilo je do izražaja u više navrata, pa čak i u Cullochovu referatu o radu nervnog sistema.

Na svečanom ručku 13. I. 1951., koji je bio završetak zasjedanja (plaćalo se po 1000 fr. za ručak), domaćin Dupuis održao je pozdravni govor, a onda je pozivao one, koji će govoriti u ime zemalja, koje su službeno pozvane na sam kolokvij. Od naših ljudi bio je M. Stojaković (Beograd) kao predstavnik NR Srbije, te ja kao predstavnik NR Hrvatske. Dok on nije stigao, osjećao sam, kao jedini učesnik od strane Jugoslavije, naročitu odgovornost, jer je bilo govora o zaista važnim stvarima, koje i sa čisto praktičnog i sa čisto teoretskog i filozofskog gledišta imaju golemu važnost. Upravo ne znam, da li može biti zanimljivijeg i važnijeg sastanka nego što je bio taj o računskim strojevima i ljudskoj misli. Pružaju se neizmjerne mogućnosti o povezivanju »žive« i »nežive« materije, kao i o svladavanju vremenskih i prostornih udaljenosti u velikom opsegu. Planovi Nikole Tesle o upravljanju na daljinu, problemi robota, svladavanje prostora i izvan Zemlje, postaju živa realnost.

U vezi sa gornjim razmatranjima spomenimo da je u najnovije vrijeme U. N. E. S. C. O. pokrenuo pitanje, da se izgradi jedan Institut za mozak te jedan elektronski računski stroj.

Dr. Đ. Kurepa

IZ DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA N. R. HRVATSKE

ODRŽANI KOLOKVIJI

1) 3. I. 1951. *V. Glaser: O principima kvantne mehanike*

Svrha predavanja bila je da se pokaže s kakvim se matematskim aparatom služi današnja kvantna mehanika, te kako glase njezini osnovni zakoni u toj matematskoj formulaciji. Skicirana je teorija linearnih operatora i Hilbertovog prostora u Diracovoj simbolici, objašnjena veza između operatora i fizikalnih veličina, koje oni reprezentiraju, a u vezi s time ukazano na statističku interpretaciju kvantne mehanike. Konačno su postavljene jednadžbe gibanja bilo kojeg mehaničkog sistema u Heisenbergovoj i Schrödingerovoj formi.

2) 10. I. 1951. Stručno-pedagoško veče:
Referat Savezne Komisije za nastavu u srednjim i srednjim stručnim školama

3) 17. I. 1951. *S. Rajčić: Matematika s više predznaka*

Predavač mjesto uobičajenih predznaka + i — uvodi jedan sistem brojeva s tri predznaka definirajući osnovne računske operacije. Zbrajanje se izvodi kao kod relativnih brojeva, dok je produkt jednako označenih brojeva istog predznaka, a produkt razno označenih daje treći predznak. U pogodnom koordinatnom sistemu dobijaju se grafovi funkcija, od kojih je specijalno prikazana linearna funkcija, koja je predstavljena najrazličitijim slomljenim linijama i zatvorenim poligonima, pa je time dobiven konačni analitički izraz za grafove, koji se inače prikazuju Fourierovim redovima. Promatrana algebra je neasocijativna, što se geometrijski iskorištava. Na kraju je problem poopćen uvođenjem brojeva s n predznaka, koji su nosioci raznih kvaliteta. Ovakova bi matematika vodila više računa o kvalitetu, nego naša dvopredznačna.

4) 24. I. 1951. *Dr. S. Bilinski:*
Metoda transformacije teorema u planimetriji

Prikazana je metoda, kojom se iz nekog metričkog planimetrijskog teorema mogu izvesti mnogi novi teoremi. Figura, na koju se odnosi neki takav teorem, neka se nalazi u kompleksnoj ravnini. U tom će slučaju danom teoremu biti pridružen izvjesni identitet među kompleksnim brojevima. Između svih istovrsnih figura, na koje se odnosi spomenuti teorem, i točaka jednog određenog područja n-dimenzionalnog imaginarnog prostora može se uspostaviti uzajamno jednoznačna korespondencija. Transformacijama tog n-dimenzionalnog imaginarnog prostora, koje preslikavaju

spomenuto područje samo na sebe, dolazi se do novih identiteta među kompleksnim brojevima, koji se uz neke uvjete mogu interpretirati kao novi teoremi o danoj figuri. Tom je metodom izvedeno više teorema o tetivnim poligonima, od kojih su neki već poznati.

5) 31. I. 1951. Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora:

a) *Prof. M. Brčić-Kostić:*
Jedan teorem iz teorije brojeva,

b) *Vl. Devidé:*
Jedan teorem iz n-dimenzionalne geometrije,

c) *Prof. M. Sevdić:*
Pogrešna operacija — dobar rezultat.

6) 7. II. 1951. *I. Babić-Gjalski:*
Procesi u kvantnoj elektrodinamici

Svrha predavanja je bila da se prikažu metode proračunavanja procesa, koji nastaju kao posljedica uzajamnog djelovanja elektrona i elektromagnetskog polja. U tu svrhu bio je razvijen Diracov račun smetnji do druge aproksimacije u tzv. reprezentaciji uzajamnog djelovanja, i izveden općenit izraz za presjek djelovanja. Ukazano je na vezu sa stacionarnim računom smetnji. Na kraju dan je osvrt na današnju situaciju u kvantnoj elektrodinamici uopće, na još neuklonjene poteškoće, te na pokušaje, koji su u tom pravcu zadnjih godina načinjeni.

7) 14. II. 1951. Stručno-pedagoško veče:
Prof. B. Kitran: Titrajni krug i elektronka

8) 21. II. 1951. *Dr. R. Cesarec:*
O pridruženju kosokutnog trokuta i četveropravokutnog peterokuta u hiperboličkoj ravnini

Predavač je pokazao, kako se to pridruženje može izvesti elementarnim geometrijskim putem na osnovu pridruženja pravokutnog trokuta i oštrokutnika, te Engelova ciklusa pravokutnih trokuta. Nije, dakle, potrebno u tu svrhu angažirati hiperboličku trigonometriju, kako je to učinio E. Roeser u jednoj svojoj radnji, izašloj god. 1925. u Sitzungsberichte Akademije u Heidelbergu. Kao primjenu toga pridruženja dao je predavač jednu posve prirodnu i elementarnu konstrukciju trokuta hiperboličke ravnine iz njegova tri kuta. Na kraju je prikazao jednu konfiguraciju, u kojoj su četveropravokutni peterokut i pridruženi mu kosokutni trokut dovedeni u takvu položajnu svezu, da bi se na osnovu nje možda moglo pridruženje tih dvaju likova izvesti čak i bez upotrebe Engelova ciklusa.

9) 28. II. 1951. *II. Redovna godišnja skupština Društva matematičara i fizičara N. R. Hrvatske*

10) 7. III. 1951. *D. Grdenić:*
Fourierova sinteza funkcije elektronskog rasporeda u kristalu živinog dietilen oksida

Strukturno istraživanje izneseno na ovom kolokviju spada u red onih istraživanja, kod kojih su predznaci strukturnih amplituda dobiveni direktno iz eksperimenata, a ne na bazi modela. Budući da se koordinate živinih atoma u rešetki mogu lako odrediti metodom probe i pogreške iz izmjerenih intenziteta interferencionih maksimuma, moglo se bez daljnjeg izvesti Fourierova sinteza projekcije elektronskog rasporeda. U konačnoj projekciji razlučili su se svi atomi i struktura je mogla biti nedvojbeno ustanovljena. Tu je röntgenska strukturna analiza djelovala kao mikroskop. Ovakve analize mogu se provesti onda, kad je u rešetki prisutan teški atom, u ovom slučaju atom žive. Nedostatak ovakovih analiza sastoji se u difrakcionom efektu, koji metodički uzevši ima za uzrok prerani prekid Fourierovog reda. I u ovom slučaju je difrakcioni efekt smanjio točnost projekcije, jer su se pojavili lažni maksimumi u okolici atoma žive. Treba istaknuti, da je ovo prvo potpuno röntgensko strukturno istraživanje kod nas, a izvedeno je u laboratoriju Fizičkog instituta Prir. mat. fakulteta.

11) 14. III. 1951. Stručno-pedagoško veče:
Prof. I. Smolec:
O formalizmu prevelike točnosti u nastavi matematike i fizike

12) 21. III. 1951. *Dr. Ing. D. Bazjanac:*
Otpor uzduh pri vrlo velikim brzinama

Otpor uzduha zavisi od više parametara, u koje spadaju Reynoldsov broj R, koji izražava viskoznost i Machov broj M, koji izražava kompresibilnost uzduha. Viskoznost izaziva unutarnje trenje i utječe na stvaranje vrtloga pri optjecanju tijela i na odvajanje graničnog sloja. U koliko je veći M, u toliko je manji utjecaj viskoznosti, a veći utjecaj stlačivosti na karakter strujanja. Za $M > 1$ nastupaju potpuno nove aerodinamičke pojave. Uslijed zgušnjavanja uzduha pojavljuje se kompresioni udar u obliku Machovog konusa. Poremećaji se sada rasprostiru samo u područje unutar tog konusa, a pojave strujanja uzduha su u tom slučaju vrlo složene. Teorija nije još u stanju, da obuhvati u analitičkom obliku sve faktore, koji izazivaju otpor uzduha pri nadzvučnim brzinama. Rješenje se traži u eksperimentalnom proučavanju tih faktora u aerodinamičkim tunelima za nadzvučne brzine. U pro-

jekciji je pokazan niz fotografskih snimaka takvih uređaja i nekoliko slika suvremenih raketnih projektila i aviona, koji imaju brzine veće od brzine zvuka.

13) 28. III. 1951. Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora:

a) *Dr. Đ. Kurepa:*
Dojmovi sa Kongresa matematičara u Cambridge-u, U. S. A.,

b) *Dr. Z. Janković:*
Jedan izvod Bernoullijeve formule,

c) *B. Zelenko: Određenje* $\lim\limits_{n \to \infty} y^{(n)}(x)$,

d) *Prof. M. Sevdić:*
Računske operacije pomoću papira.

GODIŠNJA SKUPŠTINA DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE

II. Redovna godišnja skupština Društva matematičara i fizičara NR Hrvatske održana je u srijedu 28. II. 1951. u 18,30 sati u Matematičkom institutu Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Skupštinu je otvorio predsjednik Društva Dr. Đ. Kurepa i pozdravio predsjednika Hrv. prir. društva Dr. F. Tućana, predstavnika Ministarstva za nauku i kulturu načelnika M. Butorca, predstavnika Ministarstva prosvjete prof. A. Pucića i predstavnika Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti Dr. Ž. Markovića. Zatim je održao predavanje pod naslovom: »Povodom novih računskih strojeva«. (Vidi slijedeći broj ovog godišta Glasnika).

Na prijedlog Dra Đ. Kurepe Skupština izabire prof. L. Rajčića i ing. V. Matkovića za ovjerovitelje zapisnika, a u radno predsjedništvo: Dra Ž. Markovića, Dra J. Goldberga i prof. S. Škreblina.

Dr. Ž. Marković daje riječ tajniku Dru Z. Jankoviću, koji podnosi tajnički izvještaj (v. str. 76).

Dr. Ž. Marković zatim daje riječ blagajniku Dru V. Vraniću, koji podnosi ovaj blagajnički izvještaj:

P r i m i c i:

Prijenos salda iz 1949. god.	Din	1.946.—
Upisnine i članarine plaćene na ček. račun Društva 401-9533139	„	33.192.—
Subvencija Ministarstva za nauku i kulturu na ček. račun Društva 401-9533139	„	50.000.—
Ukupno	Din	85.138.—

I z d a c i:

Administrativni troškovi	Din	4.759.—
Hrv. prir. društvu za štampanje Glasnika . . .	„	70.000.—
Saldo 28. II. 1951.	„	10.379.—
Ukupno	Din	85.138.—

Nakon toga je član nadzornog odbora prof. M. Sevdić podnio izvještaj nadzornog odbora.

Na prijedlog prof. G. Šindlera Skupština izabire Dra D. Pejnovića, prof. B. Maksića i asist. R. Draščića za članove kandidacione komisije, a za skrutatora dra B. Metzgera i asist. V. Sedmaka.

Dr. Ing. M. Paić u ime nadzornog odbora predlaže razrješnicu dosadanjem odboru i pri tom ističe njegovo zalaganje i postignuti uspjeh. Skupština jednoglasno podjeljuje razrješnicu dosadanjem upravnom odboru.

Kandidaciona komisija predložila je za predsjednika Dra Đ. Kurepu, dok su za članove upravnog odbora predloženi: Dr. S. Bilinski, Dr. ing. D. Blanuša, Dr. J. Goldberg, Dr. Z. Janković, Dr. B. Marković, Dr. V. Niče, Dr. ing. M. Paić, asist. P. Papić, prof. B. Pavlović, Dr. I. Supek, prof. S. Škreblin, prof. R. Vernić, Dr. V. Vranić. Skupština tajnim glasanjem (prisutno 48 redovnih članova) usvaja prijedlog kandidacione komisije.

Na prijedlog kandidacione komisije jednoglasno je izabran ovaj nadzorni odbor: Dr. Ž. Marković, Dr. M. Hercigonja i prof. M. Sevdić, i ovaj sud časti: Dr. J. Lončar, Dr. V. Vrkljan i Prof. M. Lukšić.

Na kraju Dr. V. Vranić podnosi prijedlog proračuna za 1951. god.:

Za opće potrebe	cca	Din	8.700.—
Za štampanje šest brojeva Glasnika (2 iz 1950., 4 iz 1951. god., pojedini broj cca Din 59.000.—)	cca	„	354.000.—
	Ukupno	Din	362.700.—

Budući da je dosadašnja članarina, odnosno pretplata bila vrlo niska (Din 120.— godišnje), to predlaže za 1951. god. članarinu i pretplatu od Din 180.—. Time bi se smanjila potreba za subvencijom. Budući da Glasnik ima 870 pretplatnika (uključivši i članove Društva) to bi pretplata donijela 156.000.— dinara.

Prijedlog se prima, a Dr. J. Goldberg ga nadopunjuje time, da se omogući i polugodišnje plaćanje članarine, odnosno pretplate.

IZVJEŠTAJ TAJNIKA NA II. GODIŠNJOJ REDOVNOJ SKUPŠTINI DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE

Dne 12. X. 1949. održana je I. redovna godišnja skupština Društva matematičara i fizičara NR Hrvatske i ovaj izvještaj treba obuhvatiti vremensko razdoblje od tog dana, pa do 28. II. 1951. Odmah da spomenemo: razvitak Društva i njegov intenzivni i mnogostrani rad u tom razdoblju opravdali su njegovo formiranje, i baš ovo razdoblje držimo da će ući u njegovu historiju kao vrijeme, kada je ono, zahvaljujući predanom i nesebičnom radu sveukupnog članstva, postalo čvrsta radna zajednica, koja svojim radom doprinosi u znatnoj mjeri razvitku matematičko-fizičkih nauka u našoj sredini. Ovu tvrdnju možemo odmah potkrijepiti s nekoliko brojaka: učlanjeno 370 članova, oko 870 pretplatnika Glasnika, 52 održana kolokvija u tom razdoblju, 6 izašlih brojeva Glasnika, a dva neposredno pred izlaskom, 2 izašla broja »Matematičko-fizičkog lista za učenike srednjih škola«, a jedan neposredno pred izlaskom.

U tom razdoblju održaje se i Prvi kongres matematičara i fizičara F. N. R. J. na Bledu (8.—12. XI. 1949.), na kojem Društvo znatnim brojem delegata i referenata vidno učestvuje. Društvo također sudje-

luje i pri osnivanju Saveza Društava matematičara i fizičara F. N. R. J. i njegov je član. Ono sudjeluje svojim delegatima na I. sastanku Plenuma Saveza (9. i 10. V. 1950.), kao i na I. Savjetovanju matematičara i fizičara NR Srbije (24.—26. XI. 1951.). S matičnim društvom — Hrvatskim prirodoslovnim društvom — i u ovom razdoblju vežu Društvo, kao i prije Sekciju, čvrste i gotovo bi mogli reći neraskidljive veze.

Upravni odbor održavao je redovito, tokom školske godine, mjesečno svoje sjednice i bilo ih je ukupno 14.

Istaknimo odmah veliku moralnu i materijalnu potporu, koju su radu Društva u ovom vremenskom periodu, kao i ranije, pružile narodne vlasti, naročito Ministarstvo za nauku i kulturu, Ministarstvo prosvjete, kao i Hrv. prir. društvo. Zahvaljujući toj potpori i razumijevanju Društvo je moglo napredovati i razviti se u tolikom opsegu, a to ujedno daje nade, da će se razvoj Društva i dalje nesmetano i uspješno nastaviti.

Prikažimo sada redom najvažnije sektore rada Društva:

Srž rada Društva i u ovom razdoblju predstavljali su redoviti sedmični kolokviji, koji su tokom školske godine redovito svake srijede održavani u predavaonici Matematičkog instituta ili Fizičkog instituta Prirodoslovno-matematičkog fakulteta. Struktura kolokvija proširila se uvođenjem Stručno-pedagoških večeri, tako da je izgledala ovako:

a) samostalni kolokviji,

b) »Stručno-pedagoške večeri«, druge srijede u mjesecu,

c) »Večeri slobodnih tema, saopćenja i razgovora«, posljednje srijede u mjesecu.

Samostalni kolokviji imali su, kao i ranije, karakter prikaza vlastitog rada iz područja matematičko-fizičkih nauka ili, pak, karakter referatnog prikaza kojeg specijalnog područja tih nauka. Raspored je po mogućnosti usklađen tako, da sva područja budu zastupana. Tu i nadalje ostaje želja, da se broj kolokvija popraćenih pokusima poveća, budući da oni nailaze na naročito veliko zanimanje. Pitanje predavača u ovom razdoblju bilo je povoljno riješeno i njihov broj je premašivao broj raspoloživih termina. To je znak, da naši naučni radnici na području matematičko-fizičkih nauka smatraju kolokvij Društva prikladnim mjestom za objavljivanje svojih postignutih rezultata i nastojanja i da se okupljaju oko Društva kao svoje radne zajednice. To ujedno pokazuje, da je i intezitet rada Društva na tom području pravilno usklađen sa mogućnostima okoline, i da se u daljnjem razvoju može još i povećati. Treba naročito istaknuti činjenicu, da se krug predavača znatno proširio, a također da se suradnja naših mlađih naučnih radnika povećala, tako da gotovo svi naučni radnici na području matematičko-fizičkih nauka aktivno surađuju u kolokvijima Društva.

Stručno-pedagoške večeri uvedene su u ovom razdoblju, da bi se popunila jedna osjetljiva praznina u prijašnjem radu, t. j. pružila prilika iznošenja pedagoško-stručnih iskustava pojedinih nastavnika i time neposredno unaprijedila sama nastava u srednjim i srednjim stručnim školama. Za visokoškolsku nastavu tu funkciju je preuzela Matematičko-fizička sekcija Društva sveučilišnih nastavnika s kojom je Društvo uspješno surađivalo. Odaziv nastavnika na stručno-pedagoškim večerima bio je vrlo dobar, no još uvijek postoji slab odaziv predavača, za razliku od prije spomenutih kolokvija. Problematika je bila aktuelna i u smislu zaključaka Bledskog kongresa nastojalo se što više unaprijediti nastavu fizike, a u samoj nastavi matematike istaći i ukloniti formalistički karakter. Tako je održan niz vrlo uspjelih predavanja, nekoliko popraćenih s pokusima za srednje škole, a također iznesena mogućnost izvođenja đačkih fizikalnih vježbi. Budući da u pogledu ovih večeri nije bilo toliko iskustva, kao kod samih kolokvija, nije

čudo, da je neka tema bila odabrana i iznesena na način, koji ne može neposredno unaprijediti srednjoškolsku nastavu, ili je bila iznesena u prekratkom vremenu.

Večeri slobodnih tema, saopćenja i razgovora uspješno su se razvijale i u ovom razdoblju. Moment iznenađenja potkrijepljen zanimljivim, sažetim i raznovrsnim izlaganjima privlačio je mnoge i sa zadovoljstvom treba istaknuti, da je na tim večerima dano nekoliko zanimljivih i uspješnih doprinosa raznim područjima matematičko-fizičkih nauka. Odaziv predavača bio je vrlo dobar, a to je znak, da se u našoj radnoj zajednici rad na naučno-stručnom području uspješno razvija i danomice donosi rezultata, koje zatim pojedinci imaju želju i priliku da ih i drugima odmah saopće.

Diskusije, koje su vođene povodom kolokvija, bile su katkad vanredno žive i zanimljive.

Posjećivanje kolokvija bilo je dobro. Na pojedinim predavanjima bilo je prisutno 100, pa i više slušatelja. Naročito treba pozdraviti prisustvo sve većeg broja studenata — naših članova —, jer u tome vidimo znak, da će nakon završetka, ili već tokom studija, mnogi od njih i aktivno sudjelovati u radu Društva. Društvo je sa svoje strane poduzelo sve da članove pravovremeno obavještava o kolokvijima. Tako, zahvaljujući Hrv. prirodoslovnom društvu »Priroda« donosi raspored kolokvija za mjesec dana unaprijed, »Školske novine« za tekući mjesec, a najviše zainteresirane ustanove i društva kao: Prirodoslovno-matematički fakultet, Tehnički fakultet, Sindikat prosvjetnih radnika, Geofizički zavod, Hrv. kemijsko društvo, Društvo inženjera i tehničara dobivaju redovito raspored. Da bi se omogućilo nastavnicima srednjih škola prisustvovati na kolokvijima, zamoljeno je Ministarstvo prosvjete da srijedom nastavnici matematike i fizike u Zagrebu nemaju posljednjeg sata obuke i na tu molbu stigao je pozitivan odgovor.

Navedimo održane kolokvije 1949/1950:

1. 19. X. 1949.	Dr. V. Vrkljan: Magnetski moment i spin mezona.
2. 26. X. 1949.	Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora: a) Dr. V. Vrkljan: Relativistička invarijantnost de Broglievih relacija. b) V. Glaser: Jedno proširenje relacije među determinantama. c) Dr. Đ. Kurepa: Problem tangente na čunjosječnici (Elementarno). d) Dr. V. Lopašić: Otkriće novog planeta Vulkana.
3. 3. XI. 1949.	Prof. L. Rajčić: Projektivno shvaćanje hiperbolične geometrije u ravnini, I.
4. 16. XI. 1949.	Prof. L. Rajčić: Projektivno shvaćanje hiperbolične geometrije u ravnini, II.
5. 23. XI. 1949.	Dr. A. Peterlin: Struktura velikih molekula.
6. 7. XII. 1949.	Dr. Ing. R. Kušević: Krakovijani ili Gaussov algoritam?
7. 14. XII. 1949.	Prof. L. Rajčić: Projektivno shvaćanje hiperbolične geometrije u prostoru.
8. 28. XII. 1949.	Prof. R. Vernić: Termodinamičke karakteristike zračnih masa.
9. 28. XII. 1949.	Veče slobodnih tema, saopćenja i razgovora: a) Dr. S. Škreb: O centrifugalnoj sili. b) Dr. ing. F. Havlíček: O konstanti gravitacije. c) Dr. ing. D. Blanuša: Razvijanje u red potencija. d) Dr. Đ Kurepa: O djelimično uređenim skupovima.

10—17 (vidi Glasnik T. 5, 1950, n. 1 str. 42).
18—33 (vidi Glasnik T. 5, 1950, n. 2—3 str. 123).
34—44 (vidi Glasnik T. 5, 1950, n. 4—5 str. 215).
45—52 (vidi Glasnik T. 6, 1951, n. 1—2 str. 72).

Društveni časopis »Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, koji izlazi već šestu godinu, u ovom razdoblju uspio je donekle nadoknaditi vremenski zaostatak u izlaženju. Budući da će T. 5, br. 4—5 1950. god. izaći za vrlo kratko vrijeme taj vremenski zaostatak iznosit će manje od 3 mjeseca, što je vrlo malo zakašnjenje obzirom na teškoće na koje on u pogledu štampanja nailazi. Preopterećenost tiskare, pa zatim specifičnost matematičkog sloga, a i to što se on u tiskari ne smatra prioritetnim časopisom u pogledu štampanja, glavni su razlog toga stanja. Redakcija je poduzela sve potrebno, da bi se tokom 1951. god. te zapreke uklonile i postoji opravdana nada, da će Glasnik, uz potporu nadležnih faktora, ove godine ukloniti vremenski zaostatak.

Struktura Glasnika ostala je uglavnom nepromijenjena prema prošlim godinama s time, da je uvedena rubrika »Iz Društva matematičara i fizičara N. R. Hrvatske«, koja donosi kratke prikaze održanih kolokvija, primljene publikacije, a i druge kratke obavijesti o značajnijim događajima za Društvo. Redakcija također nastoji smanjiti vremenski razmak između objavljivanja zadataka i njihovih rješenja i u tom je baš u posljednje vrijeme dosta uspjela. Što se tiče materijala izgleda da je i Glasnik u povoljnom položaju, jer postoji dosta široki krug stručnjaka saradnika, koji će omogućiti, da se nivo Glasnika sve više uzdiže, a da pri tome raznovrsnost sadržaja ne samo sadrži već i poveća krug pretplatnika i čitatelja.

Sada se Glasnik štampa u 1300 primjeraka. Svakako broj od 870 pretplatnika (uključivši unutra i članove Društva, koji Glasnik primaju besplatno), a i nagli porast u posljednje vrijeme, pokazuje, da Glasnik pravilno služi postavljenim zadacima — unapređivanju naučnog i stručnog rada na području matematičko-fizičkih nauka.

Zamjena Glasnika za domaće i strane srodne naučne publikacije također se uspješno razvija. Tako se Glasnik šalje Akademijama znanosti i umjetnosti, svima republičkim društvima matematičara i fizičara, a također republičkim Ministarstvima prosvjete, da ih preporuče srednjim školama. Veze sa srodnim naučnim inozemnim društvima također se pojačavaju i upravo u posljednje vrijeme poduzeta je sistematska akcija na tom području, koja pokazuje dobre rezultate. Glasnik će se tokom 1951. godine slati na oko 150 inozemnih društava i ustanova i postoji nada, da će se broj od trideset dosada uspostavljenih zamjena bitno povećati.

Razmotrivši tako dva najvažnija područja samonikle aktivnosti spomenimo sada najvažnija područja rada »inducirane« aktivnosti. Društvu, kao članu Saveza, povjeren je, naime, na Plenumu Saveza sastav Komisije za srednje i srednje stručne škole, a također s tim u vezi izdavanje »Matematičko-fizičkog lista za učenike srednjih škola«, koji je namijenjen svim narodnim republikama. Shvaćajući važnost tih zadataka Društvo je pristupilo njihovom izvršenju, pa je tako u jesen 1950. god. sastavljena komisija od poznatih naših stručnjaka za nastavno-pedagoška pitanja. Sa zadovoljstvom treba istaknuti, da je navedena komisija uspješno izvršila povjereni zadatak i izradila elaborate o nastavi matematike i fizike i pitanjima u vezi s njom. Ti elaborati moći će poslužiti kao osnova za svako uspješno nastojanje u vezi s poboljšanjem nastave kao i u otklanjanju objektivnih i subjektivnih zapreka, koje tome stoje na putu.

Drugi zadatak — izdavanje »Matematičko-fizičkog lista« naišao je u početku na smetnje administrativno tehničke prirode, no Društvo i redakcija lista uspjeli su ih ukloniti. List, u nakladi od 5.000 primje-

raka počeo je početkom godine redovito izlaziti, pa su tako dosad izašla dva broja. Treba međutim istaknuti, da je Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske učinilo na svom području sve u pogledu rasprostranjenja lista, kao i suradnje u njemu, dok se obećana suradnja drugih članova Saveza dobrim dijelom nije ostvarila. Naravno da to predstavlja velike poteškoće, a ujedno, ukoliko se stanje ne popravi, može staviti u pitanje i samo izlaženje lista. (Stanje lista se međutim do danas bitno popravilo u pogledu pretplatnika. Sa zadovoljstvom ističemo da se tiraža morala povećati na 10.000 komada i da je posve rasprodana). Nije potrebno isticati koliku bi ulogu mogao odigrati taj list u stručnom uzdizanju naše omladine na području matematičko-fizičkih nauka, pa zaista treba učiniti sve, da on postane redovita i neophodna lektira naše omladine, pogotovo one srednjoškolske, koja pokazuje zanimanje za prirodne i tehničke nauke. Time će i nastavnici matematike i fizike dobiti znatnog pomagača u uspješnom izvršenju svojeg zadatka.

Društvo je također zamolilo naše najpriznatije stručnjake, da obrazuju Komisiju za nazive i oznake. Komisija je pretresla prijedlog oznaka i naziva u području fizikalnih nauka, no za sada nije donijela nikakav definitivan zaključak ni prijedlog.

Na inicijativu Ministarstva prosvjete Društvo je nadalje dalo sugestiju za sastav redakcije malih popularnih monografija iz područja matematičkih, fizičkih i kemijskih nauka, a također okupilo prve autore tih monografija, koje će sigurno odigrati važnu ulogu.

Sa Hrvatskim prirodoslovnim društvom Društvo je bilo čvrsto povezano i plod te suradnje oćutio se na nekoliko područja. Tako je zahvaljujući toj uspješnoj suradnji ponovno počelo 1950. god. izlaženje »Boškovića« u obliku almanaha, koji će u znatnoj mjeri unaprijediti zanimanje za astronomiju i prirodne nauke. Također je ta suradnja došla do izražaja u zamašnom planu prevodilačke i publicističke djelatnosti, naročito na području fizičkih nauka, u Prirodoslovnim djelima, Knjižnici Prirode, Maloj naučnoj knjižnici kao i u samom časopisu »Prirodi«. Posebno, pak, treba istaknuti svesrdnu i nesebičnu pomoć u administrativnom i materijalnom pogledu Hrvatskog prirodoslovnog društva pri izdavanju Glasnika, koja Društvo matematičara i fizičara mnogo obavezuje.

Kao i ranije rad Društva očitovao se i u radu pojedinih članova, u njihovom stručnom i popularizatorskom radu kao predavača u Centralnom narodnom sveučilištu, radiostanici, raznim udruženjima i t. d., ili, pak, kao pisaca sastavaka određenih za široke krugove.

Na osnovu izloženog držimo, da se može utvrditi, da je Društvo izvršilo znatan dio jednog zamašnog zadatka. Ono je, naime, izrađivalo i proširivalo bazu, na kojoj se uspješno mogu uprijeti nastojanja za kulturno i materijalno uzdizanje naše sredine. Tu bazu predstavljaju matematičko-fizičke nauke, jer bez njih je nemoguć razvoj tehničkih nauka, dakle i industrijalizacije i socijalističke izgradnje. Poznavanje tekovina tih nauka također je nuždan preduvjet za uspješan razvoj kulturnog života i stvaranje naučnog gledanja na svijet.

Naravno da dosadanja aktivnost, premda znatna, nije iscrpila sve mogućnosti. Tako osim nastavljanja i produbljivanja spomenutih područja rada pred Društvo se postavljaju i novi, konkretni zadaci, kao na pr. osnivanje podružnica, uključivanje srednjoškolskih aktiva u njihov rad, organiziranje knjižnice, skupljanje publikacija svojih članova i dr. S druge strane i dosadanji rad dopušta mogućnost poboljšanja, pa će zato svaku konstruktivnu i korisnu sugestiju rado primiti i uvažiti dosadanji, a zacijelo i budući, upravni odbor. Samo u tome, da bi uspjeh bio potpun, držimo se prokušanog pravila: Dane sugestije po mogućnosti iskupimo vlastitim djelima.

Z. Janković

POSLOVNIK ZA RAD PODRUŽNICA DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE

Čl. 1. Društvo matematičara i fizičara NR Hrvatske može osnivati podružnice u mjestima, u kojima se nalazi bar 10 članova Društva, od toga barem pet redovnih.

Čl. 2. Odluku o osnivanju podružnice donosi upravni odbor Društva, a na prijedlog svojih članova iz mjesta, u kome se podružnica osniva.

Čl. 3. Podružnice ostvaruju na svom području zadatke Društva navedene u čl. 5. Pravila Društva i u tu svrhu služe se sredstvima navedenima u čl. 6.

Podružnice održavaju po mogućnosti jedanput mjesečno sastanak stručne ili nastavno-stručne prirode.

Čl. 4. Radom podružnice upravlja pročelnik, kojemu pomaže tajnik podružnice.

Čl. 5. Pročelnika i tajnika biraju tajnim glasanjem članovi podružnice na godišnjoj skupštini podružnice.

Čl. 6. Godišnja skupština održava se početkom školske godine, a najkasnije u mjesecu prosincu. Zapisnik i izvještaj, kao i plan rada za iduću godinu šalje se upravnom odboru Društva.

Čl. 7. Djelovanje podružnice prestaje: a) ako to odluči dvotrećinska većina svih članova podružnice, b) ako broj članova padne ispod onog navedenog u članu 1., c) na osnovu odluke upravnog odbora Društva i d) odlukom narodnih vlasti.

Čl. 8. Ovaj poslovnik donijela je uprava Društva na osnovu čl. 4 Pravila Društva na svojoj sjednici od 26. III. 1951.

OSNIVANJE PRVE PODRUŽNICE DRUŠTVA MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE U RIJECI

Matematičari i fizičari u Rijeci pokazivali su već dulje vremena želju da se okupe i u čvrstoj organiziranoj formi rade na razvijanju matematičko-fizičkih nauka kao i na rješavanju pedagoško-stručnih pitanja u vezi s njima. Tako je pred godinu dana ta aktivna radna grupa unutar podružnice Hrv. prir. društva osnovala matematičko-fizičku Sekciju podružnice (17. IV. 1950.), koja je svojim uspješnim radom opravdala svoj osnutak, a također pokazivala sve veći zamah i uspjeh u radu. To je i navelo članove Društva matematičara i fizičara NR Hrvatske u Rijeci da zajedno s Upravnim odborom Društva razmotre mogućnost osnivanja podružnice Društva. Budući da su bili zadovoljeni formalni i materijalni uvjeti dani Poslovnikom za rad podružnica, Upravni odbor je na svojoj sjednici od 25. IV. 1951. donio odluku o osnivanju Podružnice Društva u Rijeci. Članovi podružnice održali su osnivačku skupštinu podružnice 5. IV. 1951. i na njoj izabrali ovaj odbor: Prof. T. Gjivović, pročelnik, Prof. M. Ferenić, tajnik, Prof. Vl. Glumac, odbornik. Upravni odbor Društva matematičara i fizičara NR Hrvatske želi prvoj podružnici mnogo uspjeha u radu, a također se nada, da će matematičari i fizičari drugih većih mjesta u NR Hrvatskoj slijediti primjer svojih kolega u Rijeci.

PRIMLJENE PUBLIKACIJE

Časopisi:

1. Abhandlungen des Meteor. Dienstes d. D. D. R., n. 1, 2, 3 (1950),
2. Acta Mathematica, B. 84 (1951),
3. Annales Universitatis M. Curie-Sklodowska — Lublin, V. III. (1949),
4. Annales de l'institut de Phys. du Globe, Paris T. XXV (1950),
5. Annali di Geofisica, V. III, n. 1—4, (1950), Rim,
6. Annals of Mathematics, V. 50, n. 1, 2, 3, 4, (1950),
7. Archimedes, H. 4, 5, 6 (1950),
8. Archives des Sciences, V. 2. F. (3) (1949), V. 3. F. 1, 2, 3 (1950) Genève,
9. Arkiv f. Fysik, Bd. 2, n. 1, 2, 3, Stokholm,
10. Atti del Seminario Matematico e fisico dell'Università di Modena, V. III (1948/49),
11. Bulletin de la S. R. d. S. Liége, n. 8—9, 10 (1950),
12. Bulletin Intern. d. l'Acad. Youg., (1948), Zagreb,
13. Bollettino della Unione matematica italiana, n. 3—4, (1950),
14. Canadian Journal of Mathematics, V. I, n. 1—4 (1949), V. II. n. 1, 2, (1950),
15. Columbia University, Bulletin of Information, S. 50, n. 2, (1950),
16. Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab, B. XXIV, n. 20, B. XXV, n. 11—20, (1950),
17. Duke Mathematical Journal, V. 17, n. 2, 3 (1950),
18. Fizika v školje, n. 1, 3 (1950),
19. Godišen zbornik — Fil. fak. — Skopje 1950.,
20. Journal of the Inst. of Politech. Osaka, V. 1., n. 1, (1950),
21. Journal of the Math. Society of Japan, V. 1., n. 4 (1950),
22. Journal of the Scientific Research Institute, V. 43, (1948, 1949), Tokyo,
23. Le Matematiche — Catania, (1950),
24. Matematika v školje, n. 3, 4, 6 (1950),
25. Matematisk tidsskrift, n. 1—4 (1950),
26. The Mathematical Gazette, V. 34., n. 309, 310 (1950), London,
27. Mathematical Reviews, V. 11, n. 3—8 (1950),
28. Mémoires d. S. R. d. S. Liége, T. II, F. 1. (1949),
29. Osaka Mathematical Journal, V. 2., n. 1, 2 (1950),
30. Publications de l'observatoire astronomique de Belgrade, T. XIV (1949),
31. Rad Geofizičkog zavoda u Zagrebu, S. II, n. 2 (1948), 3 (1950),
32. Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, knj. 271. (1948) i knj. 276. (1949),
33. Rendiconti d. Accademia naz. dei Lincei, V. VIII., n. 4, 5, (1950), Rim,
34. Rendiconti del Seminario Matematico, Padova, (1950),
35. Rocznik Polskiego tow. Matematycznego, T. XXIII, 1950,
36. Rozhledy matematicko-přirodovědecké, No 4, (1949/50),
37. Veröffentlichungen des Meteor. Dienstes der D. D. R., n. 1, 2 (1950),
38. Vesnik Društva mat. i fiz.: N. R. Srbije, T. I, no 3—4 (1949),
39. Zeitschrift für Physik, Bd. 126, 127, 128.

Knjige:

1. Hinčin: Osam predavanja iz mat. analize, Beograd, (1949),
2. Hinčin: Osnovni pojmovi matematike, Beograd, (1948),
3. M. Petrović: Članci, Beograd, (1949),
4. I. S. Vavilov: Isaac Newton, Hrv. prir. društvo, Zagreb, (1950).

RJEŠENJA ZADATAKA
116, 117, 120, 121, 125, 126, 143*

116. Dokaži:

a) ako je $x = \sin t, \quad y = \sin(2p+1)t,$

onda je

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=1} = (-1)^p \cdot 2^{n-1}(n-1)!\,(2p+1)\binom{2p+n}{2n-1};$$

b) ako je

$$x = \sin t, \quad y = \cos 2pt,$$

onda je

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right)_{x=1} = (-1)^p \cdot 2^{n-1}(n-1)!\,2p\binom{2p+n-1}{2n-1}.$$

Zadatak s rješenjem dostavio D. Blanuša, Zagreb.

a) Lako je napisati funkciju $y = f(x)$:

$$y = \sin(2p+1)t = \frac{1}{2i}\left[e^{it(2p+1)} - e^{-it(2p+1)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[(\cos t + i\sin t)^{2p+1} - (\cos t - i\sin t)^{2p+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[(\sqrt{1-x^2} + ix)^{2p+1} - (\sqrt{1-x^2} - ix)^{2p+1}\right]. \tag{1}$$

Poznato je[1], da ta funkcija zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1-x^2)y'' - xy' + (2p+1)^2 y = 0. \tag{2}$$

Da to provjerimo, moramo izračunati y' i y''.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = (2p+1)\cos(2p+1)t \cdot \frac{1}{\cos t}, \tag{3}$$

$$-xy' = -(2p+1)\cos(2p+1)t \cdot \operatorname{tg} t; \tag{4}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt} = \frac{dy'}{dt}\frac{dt}{dx} =$$

$$= (2p+1)\frac{-(2p+1)\cos t\sin(2p+1)t + \sin t\cos(2p+1)t}{\cos^2 t} \cdot \frac{1}{\cos t}, \tag{5}$$

$$(1-x^2)y'' = \cos^2 t \cdot y'' = -(2p+1)^2\sin(2p+1)t +$$
$$+ (2p+1)\cos(2p+1)t \cdot \operatorname{tg} t; \tag{6}$$

$$(2p+1)^2 y = (2p+1)^2\sin(2p+1)t. \tag{7}$$

Uvrštenjem izraza (6), (4) i (7) pokazuje se, da je jednadžba (2) zadovoljena.

---

[1] C. Jordan, Cours d'analyse I, Paris 1909, str. 153.

Derivira li se (2) $n-1$ puta po x, izlazi

$$(1-x^2)\,y^{(n+1)}-(2n-1)\,y^{(n)}+[(2p+1)^2-(n-1)^2]\,y^{(n-1)}=0, \tag{8}$$

što je lako dokazati potpunom indukcijom.

Stavimo li sada $x=1$, izlazi

$$\begin{aligned}\left(y^{(n)}\right)_{x=1}&=\frac{(2p+1)^2-(n-1)^2}{2n-1}\left(y^{(n-1)}\right)_{x=1}=\\&=\frac{(2p+n)(2p-n+2)}{2n-1}\left(y^{(n-1)}\right)_{x=1}.\end{aligned} \tag{9}$$

Time je dobivena formula rekurzije za tražene derivacije. Stavljajući za n vrijednosti 1, 2, 3, ..., n izlazi zbog $y(1)=(-1)^n$

$$\left(y^{(n)}\right)_{x=1}=$$

$$=(-1)^n\,\frac{(2p+1)(2p+2)\dots(2p+n)\cdot(2p+1)(2p)\dots(2p-n+2)}{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)}. \tag{10}$$

Može se pisati

$$1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)=\frac{1\cdot 2\cdot 3\dots 2n}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n}=\frac{(2n)!}{2^n\,n!}, \tag{11}$$

$$(2p+1)(2p+2)\dots(2p+n)=\frac{(2p+n)!}{(2p)!}, \tag{12}$$

$$(2p-n+1)(2p-n+3)\dots(2p)(2p+1)=\frac{(2p+1)!}{(2p-n+1)!}, \tag{13}$$

tako da izlazi

$$\begin{aligned}\left(y^{(n)}\right)_{x=1}&=(-1)^n\,\frac{(2p+n)!\,(2p+1)!\,2^n\,n!}{(2p)!\,(2p-n+1)!\,(2n)!}=\\&=(-1)^n(2p+1)\,2^n\,n!\,\frac{(2p+n)!}{(2p-n+1)!\,(2n)!}=\\&=(-1)^n(2p+1)\,2^{n-1}(n-1)!\,\frac{(2p+n)!}{(2p-n+1)!\,(2n-1)!}=\\&=(-1)^n(2p+1)\,2^{n-1}(n-1)!\binom{2p+n}{2n-1},\end{aligned} \tag{14}$$

što je i trebalo dokazati.

b) Ovdje se slično dobiva za funkciju $y=f(x)$:

$$y=\cos(2p+1)\,t=\frac{1}{2}\left[(\sqrt{1-x^2}+i\,x)^{2p+1}+(\sqrt{1-x^2}+i\,x)^{2p+1}\right]. \tag{15}$$

Diferencijalna jednadžba glasi

$$(1-x^2)\,y''-xy'+(2p)^2y=0, \tag{16}$$

a poslije $(n-1)$-kratnog deriviranja

$$(1-x^2)\,y^{(n+1)}-(2n-1)\,xy^{(n)}+[2p^2-(n-1)^2]\,y^{(n-1)}=0, \tag{17}$$

dakle za $x=1$

$$\left(y^{(n)}\right)_{x=1}=\frac{(2p+n-1)(2p-n+1)}{2n-1}\left(y^{(n-1)}\right)_{x=1}. \tag{18}$$

Analogan postupak kao pod a) dovodi do formule u zadatku.

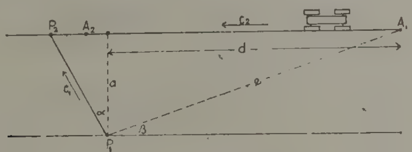
117. Na jednoj strani široke ulice nalazi se pješak, koji hoće preći poprečnim (najkraćim) putem na protivnu stranu. Međutim, kad on opazi, da se protivnom stranom ulice kreće automobil, s kojim bi se on mogao sukobiti, ne će ići poprečnim putem već će, da što sigurnije izbjegne sukobu, odabrati kosi put, koji je prema poprečnom kutu zakrenut za kut u smjeru kretanja automobila. Neka se odredi takav kut, a da u momentu, kad pješak prođe mimo automobila, bude od ovoga najviše udaljen.

Podaci: a — širina ulice, c_1 = brzina pješaka, c_2 = brzina automobila.

Diskusijom neka se ispita, da li kut α zavisi o širini ulice i o udaljenosti automobila u momentu opažanja.

(Dostavio s rješenjem D. Pejnović.)

Zadatak su ispravno riješili: prof. M. Krajnović (Sisak), stud. Lidija Colombo (Zagreb), maturant D. Skoko (Duga Resa), M. Živković (Vršac) i Alkalay (Zagreb). Možemo donijeti uz malen dodatak najkraće izvedena rješenja M. Krajnovića i L. Colombo.



Sl. 1

U slici (1) neka je a širina ulice, A_1 položaj automobila u momentu opažanja, P_1P_2 prelazni put pješaka. Kroz vrijeme pješakova prijelaza

$$t = \frac{a}{c_1 \cos \alpha}$$

pređe automobil put

$$A_1 A_2 = c_2 t = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{a}{\cos \alpha} .$$

Kad se pješak nalazi na mjestu P_2 automobil je od njega udaljen za daljinu

$$x = P_2 A_2 = P_2 Q + Q A_1 - c_2 t$$

$$= a \operatorname{tg} \alpha + d - \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{a}{\cos \alpha} \qquad (1)$$

gdje je $d = QA_1$.

Funkcija $x = f(\alpha)$ dobiva ekstremnu vrijednost, ako je

$$x' = \frac{dx}{d\alpha} = \frac{a}{\cos^2 \alpha} - \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{a \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0 .$$

Iz toga izlazi relacija

$$\sin \alpha = \frac{c_1}{c_2}, \tag{2}$$

koja kazuje, da kut α ne zavisi o širini ulice ni o daljini d. Da x bude maksimalna vrijednost funkcije $f(\alpha)$, mora postojati uvjet

$$x'' = 2a \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{a c_2}{c_1} \cdot \frac{\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha}{\cos^3 \alpha} < 0,$$

iz kojeg slijedi

$$2 < \frac{c_2}{c_1} \left(\sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha} \right). \tag{3}$$

Budući da se kut α može mijenjati od 0^0 do 90^0, izraz u zagradi ostaje veći od 2. Veličina x može imati maksimalnu vrijednost samo ako je $c_1 < c_2$.

Iz ovih razmatranja slijedi:

a) zadatak ima smisla, dok je $c_1 < c_2$;

b) veličine d, a ne dolaze do izražaja u rješenju;

c) ako je $c_1 = c_2$, onda je $\alpha = 90^0$; međusobni položaj pješaka i automobila ostaje nepromijenjen;

d) uz uvjet $c_1 > c_2$, funkcija $x = f(\alpha)$ ne dobiva maksimalne vrijednosti.

Opaska. Diskusija zadatka može se i dalje provesti. Iz jednadžbe (1) slijedi

$$d + \frac{a \sin \alpha}{\cos \alpha} \geqq \frac{c_2}{c_1} \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Postavimo li prema jednadžbi (2)

$$\sin \alpha = \frac{c_2}{c_1} = n$$

dobivamo

$$d \sqrt{1 - n^2} + a n \geqq \frac{a}{n};$$

iz toga izlazi

$$\frac{d}{a} \geqq \frac{1}{n} \sqrt{1 - n^2}.$$

U slici (2) prikazana je grafički funkcija

$$\frac{d}{a} = f\left(\frac{c_1}{c_2}\right) = \frac{1}{n} \sqrt{1 - n^2}.$$

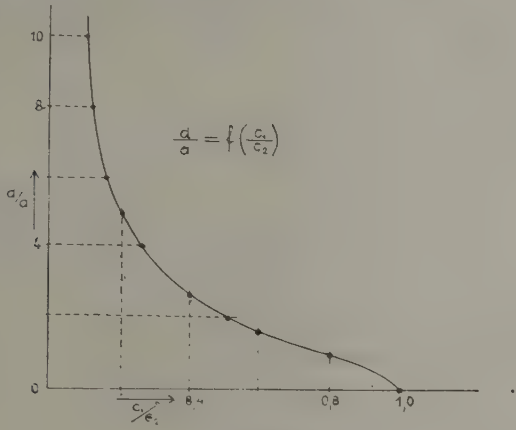
Iz relacije (3) slijedi

$$n = \frac{c_1}{c_2} \geqq \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}}$$

Prema oznaci u slici (1)

$$n = \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{a}{e}.$$

Napokon slijedi $\sin \alpha \geqq \sin \beta$ odnosno $\alpha \geqq \beta$.



Sl. 2

Granični slučaj zadovoljava uvjetu

$$c_1 = c_2, \quad \alpha = \beta = 90^0, \quad d = 0.$$

Kao specijalni primjer uzet ćemo, da je brzina pješaka 2 m u sek, brzina automobila 15 m u sek. Izlazi

$$\sin \alpha = 0{,}13\ ; \quad \alpha \doteq 8^0; \ \frac{d}{a} \geqq 7.$$

120. Odredi geometrijsko mjesto točaka u prostoru, za koje je konstantan omjer udaljenosti od a) dviju točaka, b) točke i pravca, c) točke i ravnine, d) dvaju pravaca, e) pravca i ravnine i f) dviju ravnina.

Zadatak je dostavio D. Blanuša, Zagreb. Rješenje je poslao M. Živković, Vršac. On je ispravno odredio jednadžbe traženih geometrijskih mjesta, ali mu je diskusija nepotpuna i dijelom netočna. Dajemo njegovo rješenje s potrebnim korekcijama i nadopunama.

Pošto oblik geometrijskog mjesta ne zavisi od izbora koordinatnog sistema, to ćemo, u svakom od posmatranih slučajeva, koordinatni sistem birati tako, da jednadžba traženog geom. mjesta bude što jednostavnija.

a) Za koordinatni početak uzmimo jednu od zadanih točaka, a za X os uzmimo pravac, koji prolazi kroz obje zadane točke. U takvom slučaju jedna od zadanih točaka ima koordinate (0, 0, 0),

a druga $(a, 0, 0)$. Udaljenost proizvoljne točke $M(x, y, z)$, traženog geometrijskog mjesta, od prve zadane točke iznosi

$$d_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

a od druge zadane točke je

$$d_2 = \sqrt{(x - a^2) + y^2 + z^2}.$$

Ako omjer ovih udaljenosti označimo sa k, onda je jednadžba traženog geometrijskog mjesta

$$\frac{d_1}{d_2} = k,$$

ili, kad se uvrste vrijednosti za d_1 i d_2, i sredi, dobija se

$$x^2(1 - K^2) + y^2(1 - K^2) + z^2(1 - K^2) + 2aK^2x - a^2K^2 = 0.$$

b) Za X os uzmimo zadani pravac i neka zadana točka, u takvom slučaju, ima koordinate (a, b, c). Udaljenost proizvoljne točke (x, y, z) traženog geometrijskog mjesta od zadane točke je

$$d_1 = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (x - c)^2},$$

a od zadanog pravca, t. j. od X osi

$$d_2 = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Jednadžba traženog geometrijskog mjesta glasi

$$\frac{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}}{\sqrt{y^2 + z^2}} = k,$$

ili u sređenom obliku

$$x^2 + y^2(1 - k^2) + z^2(1 - k^2) - 2ax - 2by - 2cz + (a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

c) Za ravninu XOY uzmimo zadanu ravninu, i neka zadana točka ima koordinate (a, b, c). Udaljenost proizvoljne točke $M(x, y, z)$ traženog geometrijskog mjesta od zadane točke je

$$d_1 = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + z - c)^2},$$

a od zadane ravnine

$$d_2 = z.$$

Prema tome je jednadžba traženog geometrijskog mjesta

$$\frac{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}}{z} = k$$

ili

$$x^2 + y^2 + z^2(1 - k^2) - 2ax - 2by - 2cz + (a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

d) Ovdje ćemo razlikovati dva slučaja:

1) Kad se zadani pravci sijeku;
2) kad su zadani pravci mimosmjerni.

1) Za koordinatni početak uzmimo sjecište zadanih pravaca, a za ravninu XOY uzmimo ravninu, koju određuju zadani pravci. Za X os uzmimo jedan od zadanih pravaca. Drugi pravac tada leži u XOY ravnini, neka je njegova jednadžba $Ax + By + D = 0$.

Udaljenost proizvoljne točke $M(x, y, z)$ traženog geometrijskog mjesta od prvog zadanog pravca, t. j. od X osi, iznosi

$$d_1 = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Udaljenost iste točke od drugog zadanog pravca, t. j. od $Ax + By + D = 0$, jeste

$$d_2 = \sqrt{\frac{z^2(A^2 + B^2) + (Ax + By + D)^2}{A^2 + B^2}}.$$

Jednadžba traženog geometrijskog mjesta bit će

$$\frac{(y^2 + z^2)(A^2 + B^2)}{z^2(A^2 + B^2) + (Ax + By + D)^2} = k^2$$

ili

$$A^2 k^2 x^2 + (B^2 k^2 - A^2 - B^2) y^2 + (A^2 + B^2)(k^2 - 1) z^2 +$$
$$+ 2ABk^2 xy + 2ADk^2 x + 2BDk^2 y + D^2 k^2 = 0.$$

2) Za X os uzmimo jedan od zadanih pravaca, a za ravninu XOY uzmimo ravninu paralelnu sa drugim zadanim pravcem. U takvom slučaju jednadžba drugog zadanog pravca može da bude ovo:

$$z = a.$$
$$Ax + By + D = 0.$$

Udaljenost proizvoljne točke $M(x, y, z)$ traženog geometrijskog mjesta od prvog pravca, t. j. od X osi je

$$d_1 = \sqrt{y^2 + z^2},$$

a od drugog pravca

$$d_2 = \sqrt{(z - a)^2 + \left(\frac{Ax - By + D}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)^2}.$$

Jednadžba traženog geometrijskog mjesta bit će

$$\frac{(y^2 + z^2)(A^2 + B^2)}{(A^2 + B^2)(z - a)^2 + (Ax + By + D)^2} = k^2$$

ili

$$A^2k^2x^2 + (B^2k^2 - A^2 - B^2)y^2 + (A^2 + B^2)(k^2 - 1)z^2 + 2ABk^2xy + 2ADk^2x +$$
$$+ 2BDk^2y - 2ak^2(A^2 + B^2)z + k^2(A^2a^2 + B^2a^2 + D^2) = 0.$$

e) Zadani pravac uzmimo za X os, a zadana ravnina neka ima jednadžbu $Ax + By + Cz + D = 0$.

Udaljenost proizvoljne točke $M(x, y, z)$ traženog geometrijskog mjesta od zadanog pravca bit će

$$d_1 = \sqrt{y^2 + z^2},$$

a od zadane ravnine

$$d_2 = \frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Jednadžba traženog geometrijskog mjesta bit će

$$\frac{(y^2+z^2)\,(A^2+B^2+C^2)}{(Ax+By+Cz+D)^2}=k^2$$

ili

$$A^2k^2x^2+(B^2k^2-A^2-B^2-C^2)\,y^2+(C^2k^2-A^2-B^2-C^2)\,z^2+2ABk^2xy+$$
$$+2ACk^2xz+2BCk^2yz+2ADk^2x+2BDk^2y+2CDk^2z+D^2k^2=0\,.$$

f) Jednu od zadanih ravnina uzmimo za ravninu XOY, a druga zadana ravnina neka, u takvom slučaju, ima jednadžbu

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Udaljenost točke $M(x,y,z)$ traženog geometrijskog mjesta od gornje zadane ravnine, t. j. od XOY ravnine, jest

$$d_1=z,$$

a njena udaljenost od druge zadane ravnine bit će

$$d_2=\frac{Ax+By+Cz+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Jednadžba traženog geometrijskog mjesta bit će

$$\frac{z^2\,(A^2+B^2+C^2)}{(Ax+By+Cz+D)^2}=k^2$$

ili

$$A^2k^2x^2+B^2k^2y^2+(C^2k^2-A^2-B^2-C^2)\,z^2+2ABk^2xy+2ACk^2xz+$$
$$+2BCk^2yz+2ADk^2x+2BDk^2y+2CDk^2z+D^2k^2=0.$$

U diskusijama dobijenih jednadžbi treba, prema vrijednosti broj k, razlikovati tri slučaja: $k<1$, $k>1$ i $k=1$.

U primjeru pod a), za $k<1$, dobijena jednadžba predstavlja realan elipsoid; za $k>1$ ona predstavlja imaginaran elipsoid i za $k=1$ ona predstavlja ravninu $x=\frac{1}{2}\,a$.

U primjeru pod b) za $k<1$ imamo realan rotacioni elipsoid; za $k>1$ imamo dvokrilni rotacioni hiperboloid i za $k=1$ parabolni cilindar.

Pod c) $k<1$ daje rotacioni elipsoid, $k>1$ jednokrilni rotacioni hiperboloid, a $k=0$ rotacioni paraboloid.

Pod d) 1. $k\neq 1$ daje čunj 2. reda, koji za $k=0$ degenerira u dvije ravnine.

Pod d) 2. za $k\neq 1$ izlazi jednokrilni hiperboloid, za $k=1$ hiperbolni paraboloid.

Pod e) se uvijek dobiva čunj 2. reda.

Pod f) izlaze dvije ravnine.

Vidi se dakle, da se u svim slučajevima radi o površinama 2. reda ili njihovim degeneracijama.

121. U nagnuti poluvaljkasti žlijeb stavi se papir priljubljen uz žlijeb. Pusti li se bočno začađena kuglica, ona će opisati izduženu valovitu liniju. Ako je polumjer baze žlijeba R, te gravitacija g, odrediti ispitivanjem krivulje — kad je papir ravno ispružen — periodu: 1. za slučaj, da se kuglica samo kliže; 2. kad se ona kotrlja; 3. smatrajući titranje prigušenim radi trenja (pomoću logaritmičkog dekrementa).

Zadatak zajedno s rješenjem dostavio A. Peruzović, Split.

Autor zamišlja da je gibanje kuglice sastavljeno iz gibanja niz žlijeb (kosina s nagibom φ) i titranja po nagnutom kružnom luku žlijeba (polumjer R). Sila, koja djeluje niz kosinu, iznosi $mg \sin \varphi$, a sila, koja izvodi titranje po kružnom luku $mg \cos \varphi$.

1. Uz pretpostavku, da je amplituda titraja malena i da nema otpora, vrijeme jednog titraja iznosi

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \cos \varphi}} .$$

Budući da put u drugoj četvrtini prvog titraja (početni uvjeti njihala ($t = 0$, $\psi = \psi_{max}$, $\dot{\psi} = 0$)) iznosi niz kosinu

$$\Delta_2 s = \frac{1}{4} g \sin \varphi \, \tau_0^2 ,$$

možemo odrediti

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta_2 s}{\pi^2 R} .$$

Odatle slijedi, da vrijeme titraja dobivamo na ovaj način iz eksperimentalnih podataka

$$\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta_2 s}{\pi^2 R}\right)^2}} . \qquad (1)$$

2. Uzmemo li, da se homogena kuglica (mase m, polumjera r, momenta tromosti $I = {}^2/_5 m r^2$) kotrlja, to postoji odnos ubrzanja kod klizanja (a_t) i kotrljanja (a_r)

$$m a_t = (m + I/r^2) \, a_r .$$

Prema tome je

$$a_r = \frac{5}{7} a_t .$$

Primijenimo to na naš slučaj, tada treba u (1) akceleraciju g zamijeniti s ${}^5/_7 g$, i vrijeme titraja iznosi

$$\tau' = \sqrt{\frac{7}{5}} \cdot \tau_0 . \qquad (2)$$

3. Ako imamo otpor $-k m \vec{v}$, tada je diferencijalna jednadžba za kutnu elongaciju ψ pri gibanju po nagnutom kružnom luku žlijeba oblika

$$\ddot{\psi} + k\dot{\psi} + \frac{g\cos\varphi}{r}\sin\psi = 0.$$

Uz iste početne uvjete kao u slučaju 1. i malene amplitude ($\sin\psi \approx \psi$) njezino rješenje glasi

$$\psi = \psi_{max} e^{-\frac{k}{2}t}\left[\cos\beta t + \frac{k}{2\beta}\sin\beta t\right], \quad \beta = \sqrt{\frac{g}{r} - \frac{k^2}{4}}.$$

Iz ψ odmah nalazimo, da je titranje izohrono i da vrijeme jednog »titraja« iznosi

$$\tau = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Za omjer uzastopnih amplituda na desnu i lijevu stranu dobivamo ($\psi \sim d$)

$$\frac{d_0}{d_2} = \frac{d_2}{d_1} = \ldots = e^{-\frac{k}{2}\frac{\tau}{2}}.$$

Po iznosu je eksponent (logaritamski dekrement) jednak

$$\Delta = \frac{k\tau}{4}.$$

Odatle dalje nalazimo uvrštavanjem

$$\frac{\Delta^2}{\pi^2} = \frac{k^2}{4\left(\frac{g}{r} - \frac{k^2}{4}\right)} = \frac{k^2 r}{4g},$$

ako se drugi član u nazivniku može zanemariti prema prvom. Iz izraza za τ tada nalazimo

$$\tau = \tau_0 \sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{\pi^2}}.$$

Za maleno prigušenje slijedi, dakle, približno ($\pi^2 \doteq 10$)

$$\tau = \tau_0\left[1 + \frac{1}{20}\Delta^2\right].$$

125. Gdje i kako su smještena sva rješenja jednadžbe

$$x^{\sqrt{2}} = 1?$$

Zadao Đ. Kurepa; nepotpuno riješili: M. Krajnović, Sisak; M. Živković, Vršac; St. Erdelji, Senta; R. Janković, uč., Kragujevac.

Kako je $1 = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi$, za svaki cijeli broj k, to zadana jednadžba postaje

$$x^{\sqrt{2}} = \cos 2k\pi + i\sin 2k\pi.$$

Odatle

$$x = \cos\frac{2k\pi}{\sqrt{2}} + i\sin\frac{2k\pi}{\sqrt{2}},$$

t. j.

(1) $$x_k = \cos\sqrt{2}\,k\pi + i\sin\sqrt{2}\,k\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Sva su ta rješenja x_k međusobno različita. Kad bi naime bilo $x_k = x_n$, to bi značilo, da je

$$\sqrt{2}\,k\pi - \sqrt{2}\,n\pi = r \, . \, 2\pi \text{ (r cijeli broj), t. j. } \sqrt{2} = \frac{k-n}{r},$$

što je nemoguće zbog iracionalnosti broja $\sqrt{2}$. Sva rješenja (1) — a ima ih beskonačno mnogo — smještena su na jediničnoj kružnici, jer je kvadrat udaljenosti od ishodišta jednak

$$\cos\sqrt{2}\,k\pi + \sin^2\sqrt{2}\,k\pi = 1.$$

Može se k tome pokazati, da brojevi (1) tako leže po jediničnoj kružnici, da ih ima na svakom pa i najmanjem njenom luku.

Vršak svake strjelice pokazuje gdje je smješten po jedan korijen jednadžbe.

126. Dokaži, da vrijedi

$$\sin 2\alpha\,\sin(\beta-\gamma)\,\cos\alpha + \sin 2\beta\,\sin(\gamma-\alpha)\,\cos\beta +$$
$$+ \sin 2\gamma\,\sin(\alpha-\beta)\,\cos\gamma = 0,$$

ako je

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Zadatak je dostavio D. Blanuša, Zagreb. Riješili su ga: D. Blanuša, Zagreb; V. Vranić, Zagreb; J. Moser, Skopje; M. Živković, Vršac; Z. Blašković, Zagreb; S. Erdelji, Senta; V. Jirasek, Zagreb; M. Mihaljinec, Zagreb (2 rješenja); L. Krnić, Šibenik; V. Fatić, Beograd i D. Skoko Zagreb.

Dajemo rješenje prema saglasnom postupku M. Živkovića i V. Jiraseka.

$$\sin(\beta-\gamma)\cos\alpha=\sin(\beta-\gamma)\cos[180^0-(\beta+\gamma)]=$$
$$=-\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma)=\frac{1}{2}(\sin 2\gamma-\sin 2\beta),$$

dakle

$$\sin 2\alpha\sin(\beta-\gamma)\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\sin 2\gamma-\frac{1}{2}\sin 2\beta\sin 2\alpha.$$

Ciklička zamjena kutova daje još dvije analogne jednadžbe. Zbroje li se te tri jednadžbe; izlazi tražena relacija.

143.* Kod temperature 0^0 dvije tanke metalne pruge neka imaju dužinu l, debljinu $d/2$, širinu k. Duž plohe kl neka budu ove pruge čvrsto slijepljene, tako da čine bimetalnu prugu debljine d, kojoj je jedan kraj učvršćen i koja će se, ako je ugrijemo na temperaturu t, radi različnih koeficijenata rastezanja α, α', svinuti. Pretpostavit ćemo, da svinuta bimetalna pruga ima oblik kružnog luka, zatim da su polumjeri koncentričnih lukova za oba metala

$$r+\frac{d}{2},\quad r-\frac{d}{2}.$$

Pomoću zadanih veličina l, d, t, α, α' neka se odrede polumjer r, središnji kut φ luka i otklon h slobodnog kraja svinute pruge iz ravnog početnog položaja.

Specijalni primjer: podaci za bimetalnu prugu sastavljenu od žute mjedi i željeza neka budu:

$$d=0{,}2\ \text{cm},\quad l=30\ \text{cm},\quad t=100^0\ \text{C},$$
$$\alpha=18\cdot 10^{-6},\quad \alpha'=12\cdot 10^{-6}.$$

Primjedba: Kod rješavanja zadatka uzet ćemo, da član d^2/r^2 iščezava prema 1.

Zadatak s rješenjem dostavio D. Pejnović. Opsežno formulirana, u glavnom ispravna rješenja zadatka poslali su N. Cindro (Zagreb), L. Krnić (Šibenik) i I. Aganović (Banja Luka).

Zadatak se može riješiti slijedećim, mnogo kraćim i jednostavnijim postupkom:

Polumjer r i središnji kut φ srednjeg luka svinute bimetalne pruge zadovoljavaju jednadžbe

$$l(1+\alpha t)=\frac{\pi\varphi}{180}\left(r+\frac{d}{2}\right)=\frac{\varphi}{57{,}3}\left(r+\frac{d}{2}\right) \qquad (1)$$
$$l(1+\alpha' t)=\frac{\varphi}{57{,}3}\left(r-\frac{d}{2}\right),$$

iz kojih izlazi (debljina d malena prema r)

$$\frac{1+\alpha t}{1+\alpha' t}=1+\frac{d}{r}.$$

Radi relativno malenih veličina α, α' slijedi dalje

$$r = \frac{d}{(\alpha - \alpha')\,t} \,. \tag{2}$$

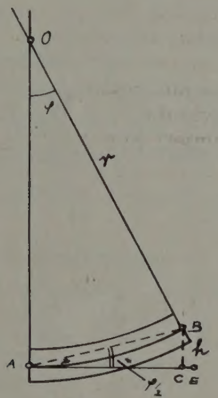
Uvrštenjem izraza za r u jednadžbu (1) dobivamo

$$\varphi = \frac{114{,}6\,lt\,(\alpha - \alpha')}{2d + dt\,(\alpha + \alpha')}$$

i dalje, zbog toga što su veličine α, α' malene,

$$\varphi = \frac{114{,}6\,lt\,(\alpha - \alpha')}{2d} \tag{3}$$

Za određivanje otklona h poslužit ćemo se slikom 1, u kojoj neka je $\widehat{AB}$ srednji luk svinute bimetalne pruge, r njegov polu-



mjer, φ središnji kut, $BC = h$ otklon slobodnog kraja pruge od ravnog početnog položaja, $AE = l$. Iz slike izlazi

$$h = AB \cdot \sin\frac{\varphi}{2} = 2r \sin\frac{2\varphi}{2} \tag{4}$$

Uvrštenjem numeričkih podataka u izraze (2), (3), (4) dobivamo

$$r = 336\,cm\,, \quad \varphi = 5^0 9'\,, \quad h = 1{,}3\,cm\,.$$

O p a s k a. Za fizikalnu obuku može se lako načiniti bimetalna pruga i njom demonstrirati princip metalnog termometra. Treba za tu svrhu jednu prugu od željeza i drugu od mjedi »nitanjem« na nekoliko mjesta vezati. Ako je jedan kraj ove dvostruke pruge učvršćen škripcem, ugrijana plamenikom pruga će se svinuti. Radi elastičnih sila ne izlazi točan oblik kružnog luka. Bimetalna pruga nalazi nekoliko tehničkih primjena. Spomenut ćemo metalne termometre i termografe, automatske uređaje za najavljivanje požara, automatsko spajanje i prekidanje struje električnih grijala, periodsko utrnjivanje i svjetljenje reklamnih žarulja i neon-cijevi, uređaje, koji priječe kratki spoj.

ZADACI

149.* Po nekog čovjeka dolazi svaki dan auto u tri sata popodne, kojim se vozi kući. Jednog dana završivši svoj posao u dva sata pođe šetajući u susret autu, a kad ga sretne, popne se i odveze kući, kuda je tog dana stigao dvadeset minuta prije, nego u ostale dane. Koliko je vremena pješačio tog dana?

(Dostavio: L. Randić)

150. Na n-dimenzionalnoj hipersferi radiusa R neka se razmjesti m točaka tako, da zbroj S kvadrata njihovih međusobnih udaljenosti bude maksimalan.

(Dostavio: Vl. Devidé)

151. Neka pravci a i b sijeku zadanu kvadriku u realnim točkama, a neka su njihove konjugirane polare pravci a' i b'. Dokaži, da četiri pravca a, b, a' i b' imaju dvije realne zajedničke transverzale, koje su ujedno konjugirane polare zadane kvadrike.

(Dostavio: L. Rajčić)

»Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, glasilo Društva matematičara i fizičara N. R. H., izlazi godišnje u pet brojeva po tri štampana arka. Godišnja pretplata iznosi Din 180.—, a može se slati na upravu Hrvatskog prirodoslovnog društva, Ilica 16/III, ili poštanskim čekom Društva matematičara i fizičara Narodne Republike Hrvatske broj 401-9533139. Glavni i odgovorni urednik: Stanko Bilinski. Redakcioni odbor: Danilo Blanuša, Josip Goldberg, Đuro Kurepa, Branimir Marković, Mladen Paić, Ivan Supek, Stjepan Škreblin, Radovan Vernić. Tehnički urednik: Zlatko Janković. — Štamparski zavod »Ognjen Prica«, Zagreb, Savska cesta broj 31.

SARADNICIMA »GLASNIKA«

Članke i dopise treba upućivati redakciji Glasnika matematičko-fizičkog i astronomskog, Zagreb, Marulićev trg 19.

Članci neka su jezično korigirani i pisani strojem sa proredom na jednoj strani papira. Uz svaki članak neka je priložen sadržaj na kojem od svjetskih jezika i to približno do jedne trećine opsega članka. Pri tom neka se formule iz članka u sadržaju ne ponavljaju. Zato treba u članku formule numerirati i u sadržaju se na njih pozvati. Glasniku se mogu poslati i članci na kojem stranom svjetskom jeziku. U tom slučaju neka se priloži sadržaj na hrvatskom jeziku. Autori iz inozemstva mogu poslati uz članak i sadržaj na svom jeziku. Taj će sadržaj uredništvo prevesti na hrvatski.

Autori dobivaju 50 separata besplatno.

AUX COLLABORATEURS DU »GLASNIK«

Les collaborateurs sont priés d'adresser les articles et la correspondance à la rédaction de »Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, Zagreb, Marulićev trg 19.

Les manuscrits doivent être écrits à la machine avec interligne sur une côté de la feuille. Les formules doivent être numérotées afin d'éviter leur répétition dans le résumé. Les auteurs étrangers sont invités de rédiger le résumé dans leur langue, la rédaction se chargeant de le traduire en croate.

Les auteurs reçoivent à titre gratuit 50 exemplaires de tirages à part.

IZ REDAKCIJE

Rješenja zadataka, koja se šalju »Glasniku«, neka su pisana strojem ili čitljivo rukom na jednoj strani papira i to tako, da se rješenje svakog zadatka nalazi na posebnom papiru. Ako je uz rješenje potrebna slika, treba je nacrtati posebno, po mogućnosti na boljem papiru. Rješenja označena zvjezdicom objavit ćemo već u drugom narednom broju »Glasnika«. Te zadatke mogu riješiti i učenici srednjih škola, odnosno studenti prvih semestara. Neka se redakciji šalju i zadaci, ali samo originalni i sa pripadnim rješenjem.

OBAVIJEST

Matematičari, fizičari i svi ostali, koji se zanimate matematičko-fizičkim naukama, učlanite se u Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske.

Prijave poslati zajedno s adresom Hrvatskom prirodoslovnom društvu, Zagreb, Ilica 16/III (za Društvo matematičara i fizičara N. R. H.). Upisninu od Din 20.— i godišnju članarinu od Din 180.— pošaljite čekovnom uplatnicom 401-9533139 (Društvo mat. i fiz. N. R. H., Zagreb). Članovi Društva dobivaju Glasnik besplatno.

Pravila Društva mogu se dobiti besplatno, ako ih zatražite na gornji naslov.

Na Glasnik se mogu pretplatiti i oni, koji nisu članovi Društva. Pretplata iznosi Din 180.— godišnje i šalje se čekovnom uplatnicom.

Molimo članove i pretplatnike da uredno plaćaju članarinu odnosno pretplatu.

Svaku promjenu adrese treba hitno javiti Hrv. prir. društvu.